

— 卡方檢定 W2

卡方檢定關鍵執行準則

- ✓ **樣本數限制：** 每個儲存格的預期頻率 (e_{ij}) 建議應大於或等於 5(SOL:合併法)，以確保檢定統計量的準確性。
- ✓ **類別變數：** 卡方檢定 (Chi-square Test) 是一種統計學上用來檢定「類別變數 (Categorical data)」之間是否存在顯著關聯的方法。若為連續變數，需先進行適當的分組。
- ✓ **自由度計算：** 獨立性與齊一性檢定自由度為 $(r-1)(c-1)$ ；適合度檢定則為 $(k-1)$ 。

卡方檢定的三大應用場景



適合度檢定

檢查樣本資料是否服從特定的機率分配（如binomial或常態分配.....）。



獨立性檢定

分析兩個類別變數之間是否存在關聯性，常用於問卷調查與交叉分析。



齊一性檢定

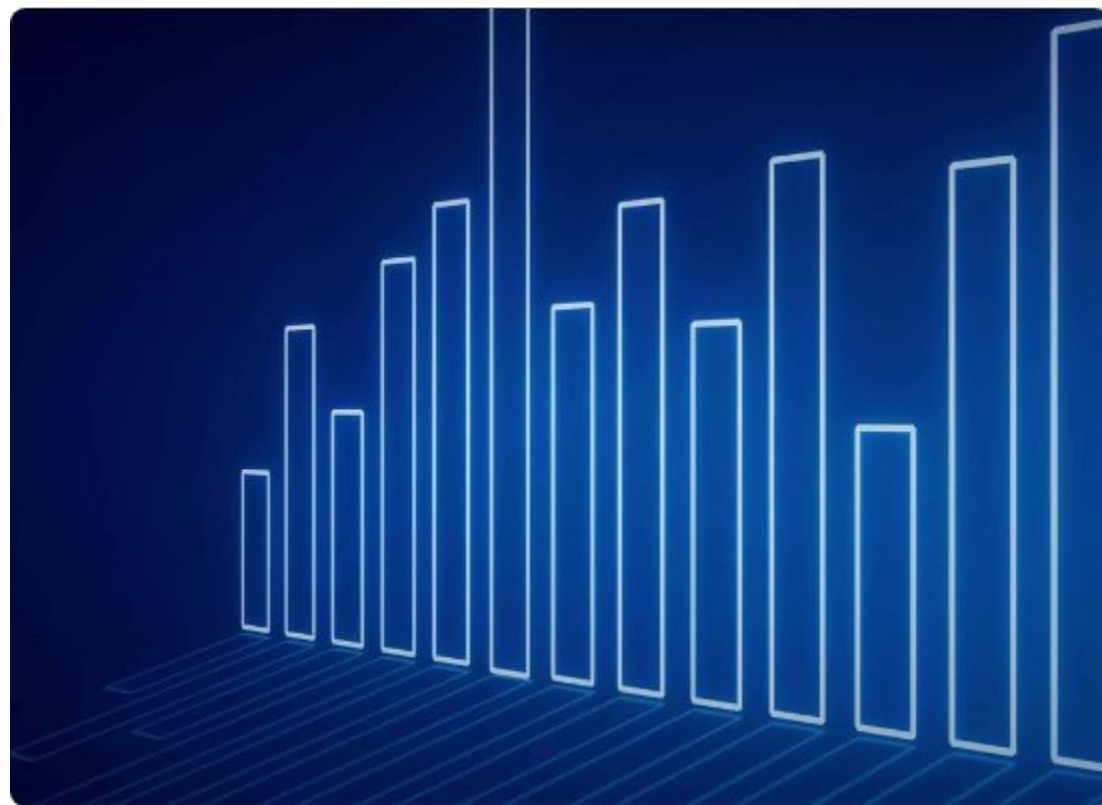
比較不同母體中，特定特徵的比例分佈是否具備一致性。

適合度檢定：數據配適分析

Goodness of Fit Test

此檢定主要用於判斷觀察到的頻率（Observed Frequencies）與假設的理論頻率（Expected Frequencies）是否存在顯著差異。

- 驗證資料是否服從多項分配
- 檢查樣本是否具備母體代表性
- 用於連續變數的分配檢查（需區間化）



適合度檢定：遺傳學花色比例

【題目】

預期花色比例為 紅:粉:白 = 9:3:4。隨機抽樣 160 株，觀察結果如下表。請在 $\alpha = 0.05$ 下檢定。

花色	紅色	粉紅色	白色	總計
觀察值	82	38	40	160



詳解：花色比例驗證

1. 假設： $H_0 : p_1 = 9 / 16 , p_2 = 3 / 16 , p_3 = 4 / 16$

2. 預期值：紅=90, 粉=30, 白=40

3. 計算卡方值：

$$\chi^2 = \frac{(82 - 90)^2}{90} + \frac{(38 - 30)^2}{30} + \frac{(40 - 40)^2}{40} \approx 2.844$$

4. 結論：自由度 $df = 2$ 臨界值為 5.991。因 $2.844 < 5.991$ ，故不拒絕虛無假設。

適合度檢定：公平骰子檢定

【題目】

擲骰子 120 次，記錄各點數次數如下。請在 $\alpha = 0.01$ 下檢定此骰子是否公平？

點數	1	2	3	4	5	6
次數	15	28	18	15	24	20



詳解：公平骰子計算過程

1. 假設： $H_0 : p_1 = \dots = p_6 = 1 / 6$

2. 預期值：所有點數之預期值均為 $120 / 6 = 20$

3. 卡方統計量：

$$\chi^2 = \sum \frac{(f_i - 20)^2}{20} = 1.25 + 3.2 + 0.2 + 1.25 + 0.8 + 0 = 6.7$$

4. 結論：自由度 $df = 5$ ，顯著水準 0.01 下臨界值為 15.086。因 $6.7 < 15.086$ ，不拒絕虛無假設。

獨立性檢定

Test of Independence

旨在探討兩個類別變數（例如：性別與偏好、學歷與收入）之間是否存在相互依賴關係。

若虛無假設成立，則一變數的分佈不應受到另一變數影響。

$$e_{ij} = \frac{(\text{Row } i \text{ Total}) \times (\text{Column } j \text{ Total})}{\text{Total Sample Size}}$$

獨立性檢定：咖啡與睡眠品質

【題目】

調查 200 人得知以下列聯表。請在 $\alpha = 0.05$ 下檢定「喝咖啡習慣」與「睡眠品質」是否相關？

習慣	良好	不佳	總計
有咖啡	40	60	100
無咖啡	70	30	100
總計	110	90	200



詳解：獨立性判定分析

1. 期望值矩陣： $e_{ij} = (R_i \times C_j) / N$

良好列： $100 \times 110 / 200 = 55$ ；不佳列： $100 \times 90 / 200 = 45$

2. 計算卡方值：

$$\chi^2 = \frac{(40 - 55)^2}{55} + \frac{(60 - 45)^2}{45} + \frac{(70 - 55)^2}{55} + \frac{(30 - 45)^2}{45} = 18.18$$

3. 結論：自由度 $df = 1$ 臨界值 3.841。因 $18.18 > 3.841$ 拒絕虛無假設。結論：兩者顯著相關。

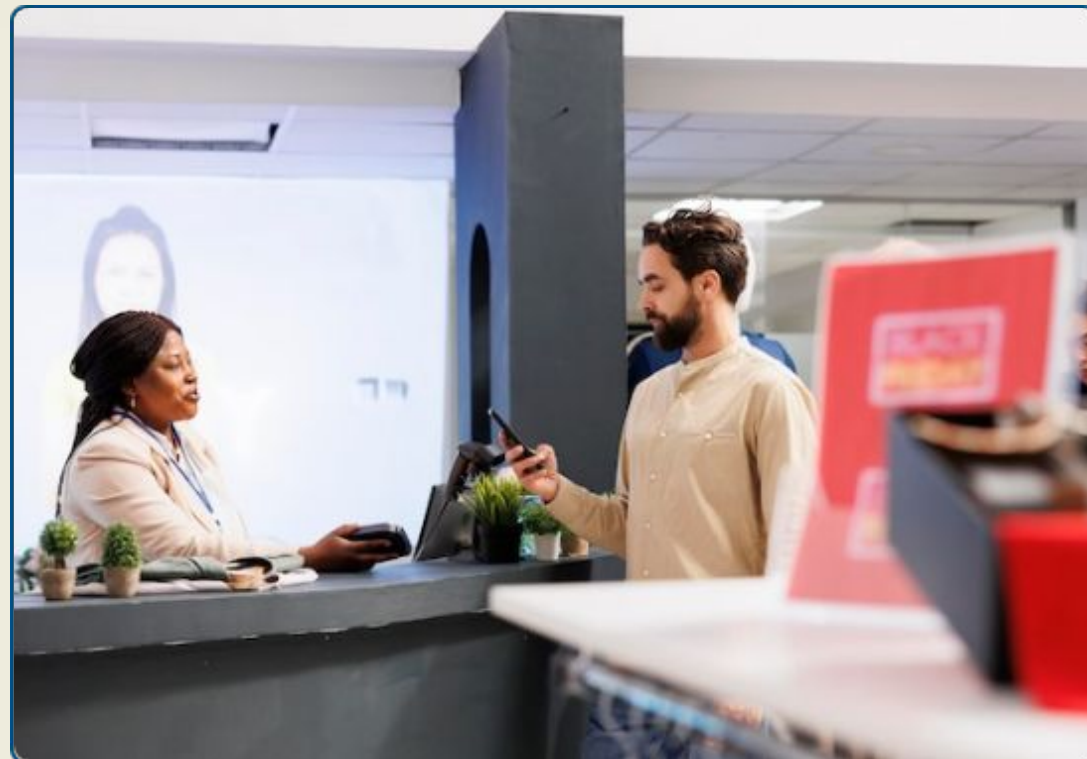
獨立性檢定：性別與支付方式

【題目】

檢定「支付方式」是否獨立於「性別」？（顯著水準 0.05）

性別	行動支付	信用卡	現金
男性	50	30	20
女性	40	40	20

樣本總數：200（男女各半）



詳解：二維列聯表分析

1. 期望值：行動支付 $= (100 \times 90 / 200) = 45$ ；信用卡 $= (100 \times 70 / 200) = 35$ ；現金 $= (100 \times 40 / 200) = 20$

2. 卡方計算：

$$\chi^2 = \frac{(50 - 45)^2}{45} + \frac{(30 - 35)^2}{35} + \dots + \frac{(40 - 35)^2}{35} \approx 2.54$$

3. 結論：自由度 $df = (2 - 1) \times (3 - 1) = 2$ ，臨界值 5.991。因 $2.54 < 5.991$ ，不拒絕虛無假設。

齊一性檢定：母體比例比較

Test of Homogeneity

此檢定用於確認來自不同母體的獨立樣本，在某一類別屬性上的分配是否「一致」。

例如：不同地區的投票傾向、不同品牌的使用者忠誠度等。這與獨立性檢定在數學計算上雷同，但抽樣策略與研究動機不同。

$$H_0 : p_1 = p_2 = \dots = p_k$$

齊一性檢定：生產線合格率

【題目】

各生產線隨機抽取 100 個產品，合格與否如下。請檢定三條線之合格率是否一致？ $\alpha = 0.05$

線別	合格	不合格
A 線	95	5
B 線	88	12
C 線	93	7



詳解：多母體比例比較

1. 合併合格率： $\bar{p} = 276 / 300 = 0.92$

2. 期望值：每線合格數均應為 92，不合格為 8

3. 計算卡方值：

$$\chi^2 = \frac{3+16+1}{92} + \frac{9+16+1}{8} \approx 3.533$$

4. 結論： $df = 2$ ，臨界值 5.991。卡方值小於臨界值，**不拒絕虛無假設**，合格率視為一致。

齊一性檢定：政策支持度地區差異

【題目】

調查北中南地區對新政策的支持意願如下。檢定各地區民意分配是否相同？ $\alpha = 0.05$

地區	支持	不支持	無意見
北部	120	50	30
中部	100	70	30
南部	130	40	30



詳解：區域性分配齊一性

1. 計算各項期望值：整體比例為：支持=58.3%，不支持=26.7%，無意見=15%

2. 計算卡方值：

$$\chi^2 = \sum \frac{(f_i - e_i)^2}{e_i} = 8.86$$

3. 結論：自由度 $df = 4$ ，顯著水準 0.05 下臨界值為 9.488。

因 $8.86 < 9.488$ ，不拒絕虛無假設。各地區民意分配視為相同。

卡方檢定關鍵執行準則

- ✓ **樣本數限制：** 每個儲存格的預期頻率 (e_{ij}) 建議應大於或等於 5(SOL:合併法)，以確保檢定統計量的準確性。
- ✓ **類別變數：** 卡方檢定 (Chi-square Test) 是一種統計學上用來檢定「類別變數 (Categorical data)」之間是否存在顯著關聯的方法。若為連續變數，需先進行適當的分組。
- ✓ **自由度計算：** 獨立性與齊一性檢定自由度為 $(r-1)(c-1)$ ；適合度檢定則為 $(k-1)$ 。

題目：年齡層與藥物療效相關性

某藥廠進行臨床試驗，收集了 100 位受試者的數據。請在的顯著水準下，檢定「年齡層」與「療效」是否相關？

年齡層	顯著有效	效果普通	完全無效	總計
年輕組	40	8	2	50
中高齡組	30	15	5	50
總計	70	23	7	100



解答步驟一：期望值檢查與合併

1. 計算期望值 (E_{ij})

計算「完全無效」欄位：

$$E_{13} = \frac{50 \times 7}{100} = 3.5$$

判定：期望次數 $3.5 < 5$ ，必須進行類別合併。

2. 合併後列聯表 (2x2)

將「效果普通」與「完全無效」合併為「效果不佳」：

年齡層	顯著有效	效果不佳
年輕組	40	10
中高齡組	30	20

解答步驟二：檢定統計量與結論

3. 計算卡方值 (χ^2)

合併後期望值：35 (有效), 15 (不佳)

$$\chi^2 = \frac{(40 - 35)^2}{35} + \frac{(10 - 15)^2}{15} + \dots = 4.762$$

4. 統計判斷與結論

- 自由度：df = (2 - 1) × (2 - 1) = 1
- 臨界值： $\chi^2_{0.05, 1} = 3.841$
- 決策：**4.762 > 3.841**，落入拒絕域。

結論：拒絕 H_0 。有顯著證據顯示年齡與療效相關。

題目一：常態分配適合度檢定 (Normality Test)

情境：某校老師想檢定學生段考成績是否符合常態分配 $N(70, 10^2)$ (平均數 $\mu = 70$ ，標準差 $\sigma = 10$)。隨機抽取 100 位學生的成績，觀察結果如下：

分數區間	觀察次數 (f_i)
60分以下	12
60(含) ~ 70分	42
70(含) ~ 80分	35
80分(含)以上	11
總計	100

問題：

1. 請根據常態分配 $N(70, 10^2)$ 計算這四個組別的預期機率與預期次數 (e_i)。
2. 計算卡方檢定統計量 χ^2 。
3. 在顯著水準 $\alpha = 0.05$ 下，已知 $df = 3$ 的臨界值為 7.815，結論為何？

步驟 1：計算預期機率與次數 我們使用標準常態分配 $Z = \frac{X-70}{10}$ ：

- 組別 1 ($X < 60$)： $P(X < 60) = P(Z < \frac{60-70}{10}) = P(Z < -1) \approx 0.1587$ $e_1 = 100 \times 0.1587 = 15.87$
- 組別 2 ($60 \leq X < 70$)： $P(60 \leq X < 70) = P(-1 \leq Z < 0) = 0.5 - 0.1587 = 0.3413$
 $e_2 = 100 \times 0.3413 = 34.13$
- 組別 3 ($70 \leq X < 80$)： $P(70 \leq X < 80) = P(0 \leq Z < 1) = 0.3413$ $e_3 = 100 \times 0.3413 = 34.13$
- 組別 4 ($X \geq 80$)： $P(X \geq 80) = P(Z \geq 1) = 0.1587$ $e_4 = 100 \times 0.1587 = 15.87$

步驟 2：計算卡方值

$$\chi^2 = \frac{(12 - 15.87)^2}{15.87} + \frac{(42 - 34.13)^2}{34.13} + \frac{(35 - 34.13)^2}{34.13} + \frac{(11 - 15.87)^2}{15.87}$$

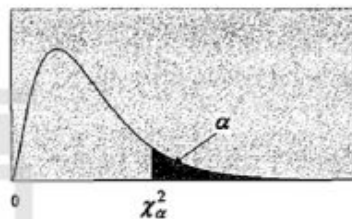
$$\chi^2 \approx 0.944 + 1.815 + 0.022 + 1.494 = 4.275$$

步驟 3：判定 因 $4.275 < 7.815$ ，不拒絕虛無假設。結論：學生成績符合常態分配 $N(70, 10^2)$ 。

表三

附表：卡方分配臨界值表

$$P(\chi^2 > \chi^2_\alpha) = \alpha$$



<i>d.f.</i>	$\chi^2_{0.995}$	$\chi^2_{0.975}$	$\chi^2_{0.950}$	$\chi^2_{0.900}$	$\chi^2_{0.100}$	$\chi^2_{0.050}$	$\chi^2_{0.025}$	$\chi^2_{0.010}$
1	0.0000393	0.0009821	0.0039322	0.0157907	2.705541	3.841455	5.023903	6.634891
2	0.0100247	0.0506357	0.1025862	0.2107208	4.605176	5.991476	7.377779	9.210351
3	0.0717235	0.2157949	0.3518460	0.5843755	6.251394	7.814725	9.348404	11.3449
4	0.206984	0.484419	0.710724	1.063624	7.779434	9.487728	11.1433	13.2767
5	0.411751	0.831209	1.145477	1.610309	9.236349	11.0705	12.8325	15.0863
6	0.675733	1.237342	1.635380	2.204130	10.6446	12.5916	14.4494	16.8119
7	0.989251	1.689864	2.167349	2.833105	12.0170	14.0671	16.0128	18.4753
8	1.344403	2.179725	2.732633	3.489537	13.3616	15.5073	17.5345	20.0902
9	1.734911	2.700389	3.325115	4.168156	14.6837	16.9190	19.0228	21.6660
10	2.155845	3.246963	3.940295	4.865178	15.9872	18.3070	20.4832	23.2093
11	2.603202	3.815742	4.574809	5.577788	17.2750	19.6752	21.9200	24.7250
12	3.073785	4.403778	5.226028	6.303796	18.5493	21.0261	23.3367	26.2170
13	3.565042	5.008738	5.891861	7.041500	19.8119	22.3620	24.7356	27.6882
14	4.074659	5.628724	6.570632	7.789538	21.0641	23.6848	26.1189	29.1412
15	4.600874	6.262123	7.260935	8.546753	22.3071	24.9958	27.4884	30.5780
16	5.142164	6.907664	7.961639	9.312235	23.5418	26.2962	28.8453	31.9999
17	5.697274	7.564179	8.671754	10.0852	24.7690	27.5871	30.1910	33.4087
18	6.264766	8.230737	9.390448	10.8649	25.9894	28.8693	31.5264	34.8052
19	6.843923	8.906514	10.1170	11.6509	27.2036	30.1435	32.8523	36.1908
20	7.433811	9.590772	10.8508	12.4426	28.4120	31.4104	34.1696	37.5663
21	8.033602	10.2829	11.5913	13.2396	29.6151	32.6706	35.4789	38.9322
22	8.642681	10.9823	12.3380	14.0415	30.8133	33.9245	36.7807	40.2894
23	9.260383	11.6885	13.0905	14.8480	32.0069	35.1725	38.0756	41.6383
24	9.886199	12.4011	13.8484	15.6587	33.1962	36.4150	39.3641	42.9798
25	10.5196	13.1197	14.6114	16.4734	34.3816	37.6525	40.6465	44.3140
26	11.1602	13.8439	15.3792	17.2919	35.5632	38.8851	41.9231	45.6416
27	11.8077	14.5734	16.1514	18.1139	36.7412	40.1133	43.1945	46.9628
28	12.4613	15.3079	16.9279	18.9392	37.9159	41.3372	44.4608	48.2782
29	13.1211	16.0471	17.7084	19.7677	39.0875	42.5569	45.7223	49.5878
30	13.7867	16.7908	18.4927	20.5992	40.2560	43.7730	46.9792	50.8922
40	20.7066	24.4331	26.5093	29.0505	51.8050	55.7585	59.3417	63.6908
50	27.9908	32.3574	34.7642	37.6886	63.1671	67.5048	71.4202	76.1538
60	35.5344	40.4817	43.1880	46.4589	74.3970	79.0820	83.2977	88.3794
80	51.1719	57.1532	60.3915	64.2778	96.5782	101.879	106.629	112.329
100	67.3275	74.2219	77.9294	82.3581	118.498	124.342	129.561	135.807