

W15

單元一：Mann-Whitney-Wilcoxon Test

小樣本檢定練習

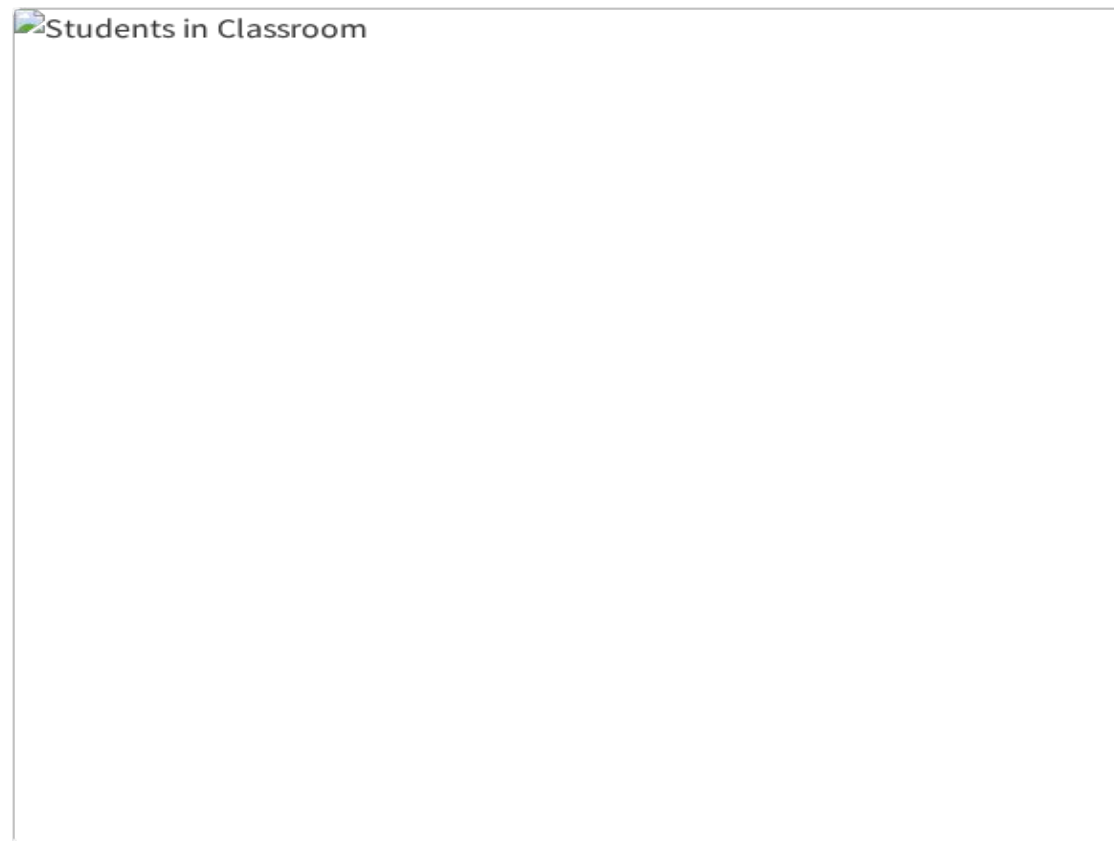
? 習題一：學生績效表現評分

Showtime Cinemas 的經理對 9 名學生員工進行績效評等。樣本包含 4 名大學生與 5 名高中生。我們想檢定兩組學生的表現是否有顯著差異。

原始評分數據 (1 為最優，35 為最差)：

- 大學生 ($n_1=4$)：15, 3, 23, 8
- 高中生 ($n_2=5$)：18, 20, 32, 9, 25

檢定水準： $\alpha = 0.05$



習題一：合併排序與求秩步驟

合併評分 (小到大)	3	8	9	15	18	20	23	25	32
對應身份	大學	大學	高中	大學	高中	高中	大學	高中	高中
指派秩 (Rank)	1	2	3	4	5	6	7	8	9

大學生秩和計算 (W)

$$W = 1 + 2 + 4 + 7 = 14$$

高中生秩和計算

$$\text{Sum} = 3 + 5 + 6 + 8 + 9 = 31$$

習題一：決策與結論

根據小樣本 MWW 機率分配表（當）： $n_1 = 4, n_2 = 5$

雙尾檢定： $p\text{-value} = 2P(W \leq 14)$

查表得： $p\text{-value} = 0.1904$

判定： $0.1904 > 0.05$

統計結論

我們**無法拒絕**虛無假設。在 $\alpha = 0.05$ 的顯著水準下，沒有足夠的證據顯示大學生與高中生的績效表現評分有顯著差異。

單元二：Mann-Whitney-Wilcoxon Test

大樣本檢定練習

習題二：分行帳戶餘額分析

經理隨機抽取分行 1 與分行 2 各 10 位客戶，調查對理財服務的滿意度評分（1-150分），檢定兩母體是否相同：

組別	原始滿意度評分數據 (已排序，單位：分)									
分行 1 (n1=10)	78	82	90	95	101	110	120	125	135	140
分行 2 (n2=10)	72	75	80	85	88	92	98	105	115	130

合併排序後，分行 1 數據對應的綜合排名為：3, 5, 8, 10, 12, 14, 16, 17, 19, 20



分行 1 觀察秩和 (W)

$$W = 3 + 5 + 8 + 10 + 12 + 14 + 16 + 17 + 19 + 20 = 124$$

√x 詳解二：大樣本常態近似參數

當 $n_1 = , n_2 = 10$ ，我們使用常態分配近似：

1. 計算平均數 μ_W

$$\mu_W = \frac{n_1(n_1 + n_2 + 1)}{2}$$

$$\mu_W = \frac{10(10 + 10 + 1)}{2} = 105$$

2. 計算標準差 σ_W

$$\sigma_W = \sqrt{\frac{n_1 n_2 (n_1 + n_2 + 1)}{12}}$$

$$\sigma_W = \sqrt{\frac{10 \cdot 10 \cdot 21}{12}} = \sqrt{175} \approx 13.23$$

🔍 詳解二：Z 檢定與最終判定

Step 3: 計算 Z 分數

考慮連續性校正 (由於 $W = 124 > \mu_W$, 取 $W - 0.5$):

$$z = \frac{124 - 0.5 - 105}{13.23} = \frac{18.5}{13.23} \approx 1.40$$

Step 4: 求出 p-value

查標準常態分配表雙尾機率:

$$p\text{-value} = 2P(z \geq 1.40) = 2(1 - 0.9192) = 0.1616$$



判定結果

無法拒絕 H_0

因為 $0.1616 > 0.05$, 在顯著水準下, 我們**沒有顯著證據**證明兩家分行的客戶服務評分存在本質上的母體差異。

原始考題與數據背景

清大計財

Test the null hypothesis that the mean and median of the downhill coasting speeds of the 4 brands of bicycles are equal at a 5% significance level.

限制條件與提示：

本張考卷在附表中「僅提供卡方分配表」，此為考場上選用「無母體統計方法 (Kruskal-Wallis)」的重要線索。

Trial	Barth	Tornado	Reiser	Shaw
1	43	37	41	43
2	46	38	45	45
3	43	39	42	46
4	41	36	45	45
5	43	39	41	43

數據等級轉換與等級和計算

品牌	轉化後之等級 (Rank)	樣本數 n_i	等級和 R_i
Barth	12, 19.5, 12, 7, 12	$n_1 = 5$	$R_1 = 62.5$
Tornado	2, 3, 4.5, 1, 4.5	$n_2 = 5$	$R_2 = 15$
Reiser	7, 16.5, 9, 16.5, 7	$n_3 = 5$	$R_3 = 56$
Shaw	12, 16.5, 19.5, 16.5, 12	$n_4 = 5$	$R_4 = 76.5$
總樣本數		$n = 20$	

同名次 (Tied values) 處理法則：

將所有 20 筆觀測值由小到大排序。若數值相同，則平分其應佔用的等級：

- ◆ 數值 43：出現 5 次，佔用第 10, 11, 12, 13, 14 名，平均等級為：
 $(10 + 11 + 12 + 13 + 14) / 5 = 12$
- ◆ 數值 39：出現 2 次，佔用第 4, 5 名，平均等級為：
 $(4 + 5) / 2 = 4.5$

假設建立與卡方分配臨界點

1. 虛無假設與對立假設

H_0 : 四品牌自行車下坡滑行速度中位數相同
 H_a : 四品牌自行車下坡滑行速度中位數不相同

2. 顯著水準與拒絕域定義

給定顯著水準 $\alpha = 0.05$ ，檢定統計量漸近於卡方分配，其自由度為 $df = k - 1 = 4 - 1 = 3$

$$RR = H \geq \chi_{0.05}^2 3 = 7.815$$

Kruskal-Wallis 統計量計算

代入 Kruskal-Wallis 檢定公式：

$$H = \left[\frac{12}{n_T(n_T + 1)} \sum_{i=1}^k \frac{R_i^2}{n_i} \right] - 3(n_T + 1)$$

將等級和數據與樣本數代入公式：

$$H = \left[\frac{12}{n_T(n_T + 1)} \sum_{i=1}^k \frac{R_i^2}{n_i} \right] - 3(n_T + 1) = 11.969$$

檢定結論與方法學省思

✔ 統計決策與結論

$$H = 11.969 \in RR$$

H_0

因為 $(11.969 \geq 7.815)$ ，故拒絕虛無假設。

實質結論：

有足夠的證據指出，四種品牌的自行車在下坡滑行速度之中位數上存在顯著的差異。



題目背景與原始數據

12 個月的合約價值數據 (\$ Millions)

月份 (t)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
數值 (Yt)	240	350	230	260	280	320	220	310	240	310	240	230

待解決問題

- 問題 (1)：比較「3個月移動平均法」與「指數平滑法 ()」的預測效果。哪一個模型效果較佳？
- 問題 (2)：下個月（即第 13 個月）的預測值分別為何？

預測方法與衡量指標



3個月移動平均 (3-MA)

$$F_t = \frac{Y_{t-1} + Y_{t-2} + Y_{t-3}}{3}$$

使用前三期的歷史實際觀測值之算術平均數，作為當期的預測值。



指數平滑法 (ES)

$$F_t = \alpha Y_{t-1} + (1 - \alpha) F_{t-1}$$

本題設定 $\alpha = 0.2$ ，設首期預測值以進行遞迴計算。



均方誤差 (MSE)

$$MSE = \frac{1}{n} \sum_{t=k}^N (Y_t - F_t)^2$$

預測誤差平方的平均值。本簡報統一以「第4個月至第12個月」之共同預測區間計算，以示公允。

3個月移動平均法 (3-MA) 計算表

月份 (t)	實際值 (Yt)	預測值 (Ft)	預測誤差 (et)	誤差平方 (et ²)	備註
1	240	-	-	-	前3期無預測值
2	350	-	-	-	前3期無預測值
3	230	-	-	-	前3期無預測值
4	260	273.33	-13.33	177.69	(240+350+230)/3
5	280	280.00	0.00	0.00	(350+230+260)/3
6	320	256.67	63.33	4010.69	(230+260+280)/3
7	220	286.67	-66.67	4444.89	(260+280+320)/3
8	310	273.33	36.67	1344.69	(280+320+220)/3
9	240	283.33	-43.33	1877.49	(320+220+310)/3
10	310	256.67	53.33	2844.09	(220+310+240)/3
11	240	286.67	-46.67	2178.09	(310+240+310)/3
12	230	263.33	-33.33	1110.89	(240+310+240)/3

3-MA: MSE 詳解過程

Step 1: 誤差平方和 (SSE)

$$\Sigma e^2 = 177.69 + 0 + 4010.69 + 4444.89 + 1344.69 + 1877.49 + 2844.09 + 2178.09 + 1110.89 = 17988.52$$

評估指標: 均方誤差 (MSE)

用於衡量預測值與實際值之誤差平方的平均數。

$$MSE = \frac{\sum (Y_i - F_i)^2}{n}$$

Step 2: 計算 MSE (n=9)

$$MSE = \frac{17988.52}{9}$$

1998.72

3-MA 之預測精確度指標

指數平滑法 ($\alpha = 0.2$) 計算表

月份 (t)	實際值 (Yt)	預測值 (Ft)	預測誤差 (et)	誤差平方 (et ²)	計算公式 ($\alpha=0.2, 1-\alpha=0.8$)
1	240	240.00	0.00	0.00	設第一期預測值等於實際值
2	350	240.00	110.00	12,100.00	$0.2*(240) + 0.8*(240)$
3	230	262.00	-32.00	1,024.00	$0.2*(350) + 0.8*(240)$
4	260	255.60	4.40	19.36	$0.2*(230) + 0.8*(262)$
5	280	256.48	23.52	553.19	$0.2*(260) + 0.8*(255.6)$
6	320	261.18	58.82	3,459.79	$0.2*(280) + 0.8*(256.48)$
7	220	272.95	-52.95	2,803.70	$0.2*(320) + 0.8*(261.18)$
8	310	262.36	47.64	2,269.57	$0.2*(220) + 0.8*(272.95)$
9	240	271.89	-31.89	1,016.97	$0.2*(310) + 0.8*(262.36)$
10	310	265.51	44.49	1,979.36	$0.2*(240) + 0.8*(271.89)$
11	240	274.41	-34.41	1,184.05	$0.2*(310) + 0.8*(265.51)$
12	230	267.53	-37.53	1,408.50	$0.2*(240) + 0.8*(274.41)$

ES: MSE 詳解過程

誤差平方總和 (n=11)

從月份 2 開始計算 (月份 1 為初始設定值):

$$\Sigma e^2 = 12100 + 1024 + 19.36 + 553.19 + 3459.79 + 2803.70 + 2269.57 + 1016.97 + 1979.36 + 1184.05 + 1408.50 = 27818.49$$

計算 MSE (n=11)

$$MSE = \frac{27818.49}{11}$$

2528.95

ES ($\alpha=0.2$) 之預測精確度指標

預測模型精確度比較 (MSE)

3個月移動平均法 (3-MA)

MSE: 1998.72

指數平滑法 (ES, $\alpha = 0.2$)

MSE: 1632.72

評估結論：在相同的比較區間（第4個月至第12個月）內，**指數平滑法**（ $\alpha = 0.2$ ）的均方誤差（MSE = 1632.72）顯著低於**3個月移動平均法**（MSE = 1998.72）。因此，**指數平滑法**在此數據集上提供了**更佳**的預測效果。

第 13 個月預測值解答 (問題 2)

3-MA 預測值 (t=13)

260.00

計算公式：

$$\frac{310 + 240 + 230}{3}$$

指數平滑預測值 (t=13)

260.02

計算公式：

$$0.2 \times 230 + 0.8 \times 267.53$$

兩模型雖方法不同，但在第 13 個月的預測結果高度接近，皆落在約 260 萬美元 左右。