W14

第三題詳解簡報

皮爾森與斯皮爾曼相關分析：DDT與蛋殼厚度之研究

Compute the Pearson and Spearman rank-correlation and test for their significance.

Let $\alpha = 0.05$.

原始數據與基本統計量

觀察值 (i)	X (DDT)	Y (Eggshell)	X^2	Y^2	XY
1	65	0.52	4225	0.2704	33.8
2	117	0.53	13689	0.2809	62.01
3	98	0.49	9604	0.2401	48.02
4	122	0.49	14884	0.2401	59.78
5	130	0.37	16900	0.1369	48.1
總和 (Σ)	**532**	**2.40**	**59306**	**1.1684**	**251.71**

斯皮爾曼等級差計算（d_i^2）

觀察值	R_X (DDT 等級)	R_Y (Eggshell 等級)	d_i = R_X - R_Y	d_i^2
1	1	4	-3	9
2	3	5	-2	4
3	2	2.5	-0.5	0.25
4	4	2.5	1.5	2.25
5	5	1	4	16
等級差平方和 Σd_i^2	**31.5**			

皮爾森積差相關（Pearson）

皮爾森係數與檢定統計量

代入皮爾森相關係數公式與 t 檢定公式：

$$r = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \bar{Y})^2}} \approx -0.5379$$

$$t = \frac{r\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r^2}} \approx -1.105$$

皮爾森檢定結果（α = 0.05）

3.182

臨界值 t (df=3)

−1.105

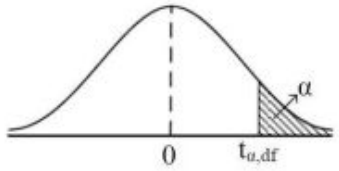
檢定統計量 t

結論：|-1.105| < 3.182 → 無法拒絕虛無假設 (H_0)

在顯著水準 0.05 下，X 與 Y 無顯著線性相關。

附表二　t 分配臨界值表

$P(t_{df} > t_{\alpha,df}) = \alpha$



	α											
df	***0.25***	***0.20***	***0.15***	***0.10***	***0.05***	***0.025***	***0.02***	***0.01***	***0.005***	***0.0025***	***0.001***	***0.0005***
1	1.000	1.376	1.963	3.078	6.314	12.710	15.890	31.820	63.660	127.30	318.30	636.60
2	0.816	1.061	1.386	1.886	2.920	4.303	4.849	6.965	9.925	14.090	22.330	31.600
3	0.765	0.978	1.250	1.638	2.353	3.182	3.482	4.541	5.841	7.453	10.210	12.920
4	0.741	0.941	1.190	1.533	2.132	2.776	2.999	3.747	4.604	5.598	7.173	8.610
5	0.727	0.920	1.156	1.476	2.015	2.571	2.757	3.365	4.032	4.773	5.893	6.869
6	0.718	0.906	1.134	1.440	1.943	2.447	2.612	3.143	3.707	4.317	5.208	5.959
7	0.711	0.896	1.119	1.415	1.895	2.365	2.517	2.998	3.499	4.029	4.785	5.408
8	0.706	0.889	1.108	1.397	1.860	2.306	2.449	2.896	3.355	3.833	4.501	5.041
9	0.703	0.883	1.100	1.383	1.833	2.262	2.398	2.821	3.250	3.690	4.297	4.781
10	0.700	0.879	1.093	1.372	1.812	2.228	2.359	2.764	3.169	3.581	4.144	4.587
11	0.697	0.876	1.088	1.363	1.796	2.201	2.328	2.718	3.106	3.497	4.025	4.437
12	0.695	0.873	1.083	1.356	1.782	2.179	2.303	2.681	3.055	3.428	3.930	4.318
13	0.694	0.870	1.079	1.350	1.771	2.160	2.282	2.650	3.012	3.372	3.852	4.221
14	0.692	0.868	1.076	1.345	1.761	2.145	2.264	2.624	2.977	3.326	3.787	4.140
15	0.691	0.866	1.074	1.341	1.753	2.131	2.249	2.602	2.947	3.286	3.733	4.073
16	0.690	0.865	1.071	1.337	1.746	2.120	2.235	2.583	2.921	3.252	3.686	4.015
17	0.689	0.863	1.069	1.333	1.740	2.110	2.224	2.567	2.898	3.222	3.646	3.965
18	0.688	0.862	1.067	1.330	1.734	2.101	2.214	2.552	2.878	3.197	3.611	3.922
19	0.688	0.861	1.066	1.328	1.729	2.093	2.205	2.539	2.861	3.174	3.579	3.883
20	0.687	0.860	1.064	1.325	1.725	2.086	2.197	2.528	2.845	3.153	3.552	3.850
21	0.686	0.859	1.063	1.323	1.721	2.080	2.189	2.518	2.831	3.135	3.527	3.819
22	0.686	0.858	1.061	1.321	1.717	2.074	2.183	2.508	2.819	3.119	3.505	3.792
23	0.685	0.858	1.060	1.319	1.714	2.069	2.177	2.500	2.807	3.104	3.485	3.768
24	0.685	0.857	1.059	1.318	1.711	2.064	2.172	2.492	2.797	3.091	3.467	3.745
25	0.684	0.856	1.058	1.316	1.708	2.060	2.167	2.485	2.787	3.078	3.450	3.725
26	0.684	0.856	1.058	1.315	1.706	2.056	2.162	2.479	2.779	3.067	3.435	3.707
27	0.684	0.855	1.057	1.314	1.703	2.052	2.158	2.473	2.771	3.057	3.421	3.690
28	0.683	0.855	1.056	1.313	1.701	2.048	2.154	2.467	2.763	3.047	3.408	3.674
29	0.683	0.854	1.055	1.311	1.699	2.045	2.150	2.462	2.756	3.038	3.396	3.659
30	0.683	0.854	1.055	1.310	1.697	2.042	2.147	2.457	2.750	3.030	3.385	3.646
40	0.681	0.851	1.050	1.303	1.684	2.021	2.123	2.423	2.704	2.971	3.307	3.551
50	0.679	0.849	1.047	1.299	1.676	2.009	2.109	2.403	2.678	2.937	3.261	3.496
60	0.679	0.848	1.045	1.296	1.671	2.000	2.099	2.390	2.660	2.915	3.232	3.460
80	0.678	0.846	1.043	1.292	1.664	1.990	2.088	2.374	2.639	2.887	3.195	3.416
100	0.677	0.845	1.042	1.290	1.660	1.984	2.081	2.364	2.626	2.871	3.174	3.390
1000	0.675	0.842	1.037	1.282	1.646	1.962	2.056	2.330	2.581	2.813	3.098	3.300
z	0.674	0.841	1.036	1.282	1.645	1.960	2.054	2.326	2.576	2.807	3.091	3.291

斯皮爾曼等級相關（Spearman）

斯皮爾曼係數與檢定統計量

代入等級相關公式與 t 檢定近似法：

$$r_s = 1 - \frac{6\sum d_i^2}{n(n^2-1)} = 1 - \frac{6 \times 31.5}{5(24)} = -0.575$$

$$t = \frac{r_s\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r_s^2}} \approx -1.217$$

斯皮爾曼檢定結果（α = 0.05）

3.182

臨界值 t (df=3)

−1.217

檢定統計量 t

結論：|-1.217| < 3.182 → 無法拒絕虛無假設 (H_0)

在顯著水準 0.05 下，X 與 Y 無顯著線性相關。

檢定統計量綜合對照表

檢定方法	相關係數 (r)	檢定值 (t)	臨界值 (3.182)	顯著性結果
Pearson	-0.5379	-1.105	$\lvert t \rvert < 3.182$	**不顯著**
Spearman	-0.5750	-1.217	$\lvert t \rvert < 3.182$	**不顯著**

數據洞察： 雖然兩個係數都顯示出中等程度的負相關，但由於樣本數較小 (n=5)，隨機誤差的影響較大，導致在 95% 信心水準下無法推論母體存在相關性。

第四題：符號檢定（Sign Test）

國產車與進口車偏好差異研究

調查數據與偏好統計

樣本數據概要（n = 15）

根據數據顯示，15 位受訪者對汽車來源的偏好如下：

偏好類型	標記	人數
進口車 (Imported)	+	11
國產車 (Domestic)	-	4
樣本總數		**15**

假設建立與顯著水準

1. 虛無假設（Null Hypothesis）

H_0: $p = 0.5$ — 受訪者對於國產車與進口車的偏好沒有顯著差異。

2. 對立假設（Alternative Hypothesis）

H_1: $p \neq 0.5$ — 受訪者對於國產車與進口車的偏好存在顯著差異 (雙尾檢定)。

3. 顯著水準（Significance Level）

$\alpha = 0.06$

二項分配機率計算（P-value）

當 H_0 成立時，成功的次數 X (偏好進口車的人數) 服從二項分配 B(15, 0.5)：

$$P(X \geq 11) = \sum_{k=11}^{15} \binom{15}{k} (0.5)^k (0.5)^{15-k} \approx 0.0592$$

由於是**雙尾檢定**，P-value 為單尾機率的兩倍：

P-value = 0.0592 × 2 = 0.1184

決策結論

0.118

P-value

0.06

α (顯著水準)

統計決策： 因為 P-value (0.118) > α (0.06)，我們無法拒絕虛無假設 (H_0)。

專業結論： 在 6% 的顯著水準下，沒有足夠的證據顯示大眾對於國產車與進口車的偏好存在顯著差異。

第五題:獲利期望 值分析

決策方案評估 (Alternative A vs. B)

5. Below you are given a profit payoff table involving two decision alternatives and three states of nature.

	States of Nature		
Decision Alternative	*s1*	*s2*	*s3*
A	*85*	*45*	*–20*
B	*40*	*50*	*15*

The probability that s1 will occur is 0.2; the probability that s2 will occur is 0.6. Calculate the expected values for criteria A and B.

報酬矩陣與機率分佈

方案 \ 狀態	s1	s2	s3
方案 A	85	45	-20
方案 B	40	50	15
機率 P(si)	**0.2**	**0.6**	**0.2***

*註 : P(s3) = 1 - 0.2 - 0.6 = 0.2

期望值 (Expected Value) 計算原理

期望值決策基準 (EMV) 是將每一種可能狀態下的報酬與其發生的機率相乘後加總：

$$EV(D) = \sum_{i=1}^{n} P_i \times R_i$$

其中：

- P_i: 狀態 s_i 發生的機率
- R_i: 在狀態 s_i 下方案產生的報酬

方案 A 的期望值計算

EV(A) 計算過程：

$$EV(A) = 0.2(85) + 0.6(45) + 0.2(-20)$$

$$EV(A) = 17 + 27 - 4 = 40$$

方案 A 的期望獲利 = 40

方案 B 的期望值計算

EV(B) 計算過程：

$$EV(B) = 0.2(40) + 0.6(50) + 0.2(15)$$

$$EV(B) = 8 + 30 + 3 = 41$$

方案 B 的期望獲利 = 41

決策結論與建議方案

最佳方案：方案 B

期望獲利 (41) > 方案 A (40)

分析建議： 雖然方案 A 在狀態 s1 具有最高的潛在獲利 (85)，但其在 s3 存在虧損風險 (-20)。方案 B 雖然獲利較為平穩，但在各狀態下均能獲利，且總期望價值較高，因此為風險規避與最大化獲利下的**最優決策**。

6. Consider a variation of the PDC decision tree shown in the following figure. The company must first decide whether to undertake the market research study. If the market research study is conducted, the outcome will either be favorable (F) or unfavorable (U). Assume there are only two decision alternatives d1 and d2 and two states of nature s1 and s2. The payoff table showing profit is shown below.

	States of Nature	
Decision Alternative	*s1*	*s2*
d1	*100*	*300*
d2	*400*	*200*

(a) Show the decision tree.

(b) Use the following probabilities. What is the optimal decision strategy?

$P(F) = 0.56$ $\quad P(s_1 \mid F) = 0.57$ $\quad P(s_1 \mid U) = 0.18$ $\quad P(s_1) = 0.40$

$P(U) = 0.44$ $\quad P(s_2 \mid F) = 0.43$ $\quad P(s_2 \mid U) = 0.82$ $\quad P(s_2) = 0.60$