

W12

簡報大綱與涵蓋主題



時間序列預測

移動平均法 (CMA4) 與季節指數計算，探討銷售數據的季節性波動。



無母數檢定

Wilcoxon 符號秩檢定與正負號檢定，分析訓練成效與偏好差異。



決策分析工具

運用期望值與決策樹進行商業決策優化，評估市場研究價值。

第一部分：時間序列分析

汽車製造商季度銷售數據研究

1. The following data show the quarterly sales of a major auto manufacturer for the years 8 through 10.

<i>Year</i>	<i>Quarter</i>	<i>Sales (\$1,000s)</i>
8	1	160
	2	180
	3	190
	4	170
9	1	200
	2	210
	3	260
	4	230
10	1	210
	2	240
	3	290
	4	260

- (a) Compute the four-quarter centered moving average values for the above time series.
- (b) Compute the seasonal indexes for the four quarters.
- (c) Use the seasonal indexes developed in Part b to remove the effect of season from the sales for year 9.

時間序列：季度銷售數據

問題 1 數據概覽：分析第 8 至 10 年的季度銷售額(單位：
\$1,000s)。

年份	季度	銷售額 (Y)
8	1, 2, 3, 4	160, 180, 190, 170
9	1, 2, 3, 4	200, 210, 260, 230
10	1, 2, 3, 4	210, 240, 290, 260

四季度中心移動平均 (CMA4)

Year/Qtr	Sales	4-Qtr Sum	4-Qtr MA	Centered MA (CMA)
8 / Q3	190	700 (Q1-4)	175.0	180.0
8 / Q4	170	740	185.0	188.75
9 / Q1	200	770	192.5	201.25
9 / Q2	210	840	210.0	217.5
9 / Q3	260	900	225.0	226.25

$$CMA = \frac{MA_t + MA_{t+1}}{2}$$

季節指數計算:初步結果

1.11

平均季節比例 (Q3)

$$\text{Ratio} = \frac{\text{Actual Sales}}{\text{CMA}}$$

季度	原始平均比率	調整後季節指數 (SI)
Q1	0.9367	0.9469
Q2	0.9701	0.9807
Q3	1.1024	1.1144
Q4	0.9477	0.958

計算步驟:

- ✓ 計算銷售額與 CMA 的比值 (Ratio-to-Moving-Average)。
- ✓ 按季度對所有年份的比值取平均。
- ✓ 調整平均值使總和等於 4.0 (或 400%)。

各季度季節指數 (SEASONAL INDEX)

根據數據計算並標準化後的季節指數：

季度	平均比值 (%)	調整後季節指數
第一季度 (Q1)	94.5	0.941
第二季度 (Q2)	98.2	0.978
第三季度 (Q3)	115.4	1.149
第四季度 (Q4)	93.6	0.932

指數大於 1 代表該季高於平均水平，例如 Q3 銷售表現最為強勁。

第 9 年數據去季節化處理

$$\text{Deseasonalized Sales} = \frac{\text{Actual Sales}}{\text{Seasonal Index}}$$

第 9 年	Q1	Q2	Q3	Q4
原始銷售額 (Y)	200	210	260	230
季節指數 (SI)	0.941	0.978	1.149	0.932
去季節化銷售	212.5	214.7	226.3	246.8

第二部分：無母數檢定

Wilcoxon 符號秩檢定與相關分析

無母數分析：核心優勢與必要性

當數據不符合常態分配假設時，無母數方法提供了一種更穩健的分析路徑：

- **分配自由性**：適用於任何形狀的分配。
- **等級轉換**：透過排名 (Ranking) 消除極端異常值的影響。
- **低樣本門檻**：在微型樣本下比參數檢定更具效力。
- **彈性**：適用於類別與等級數據。

原理 1: 魏克森符號秩檢定

分析目標

針對成對數據進行比較。例如同一組受試者在接受實驗介入前、後的變化。

權重機制

不僅考慮方向(正負), 更透過排名賦予差值較大的項次更高的影響力權重。

適用限制

假設差值對稱於中位數。若樣本數大於20, 可轉換為 Z 分數進行常態近似檢定。

問題 2: 題目內容 Problem Statement

下表顯示了 10 位業務員在參加準備研討會前後的銷售數據

Subject	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Before (B)	110	95	125	85	135	75	70	100	145	120
After (A)	140	100	150	80	130	85	60	115	160	135

使用 **Wilcoxon 符號秩檢定** 以判定研討會是否有效。這是一個單尾檢定，顯著水準 $\alpha = 0.05$ 。

Q2 計算步驟：差異與排序 Step 1: Differences

Subj	Diff (A-B)	Diff	Rank	Signed Rank
1	+30	30	10	+10
2	+5	5	2	+2
3	+25	25	9	+9
4	-5	5	2	-2
5	-5	5	2	-2

*當 |Diff| 相等時，取平均秩次。這裡 5 有三個 (Subj 2, 4, 5)，秩次為 $(1+2+3)/3 = 2$ 。

Q2 計算步驟：完成表格 Step 2: Final Tally

Subj	Diff (A-B)	Diff	Rank	Signed Rank
6	+10	10	4.5	+4.5
7	-10	10	4.5	-4.5
8	+15	15	7	+7
9	+15	15	7	+7
10	+15	15	7	+7

10 的平均秩次： $(4+5)/2 = 4.5$ ；15 的平均秩次： $(6+7+8)/3 = 7$ 。

Q2 統計量加總 Step 3: Sum of Ranks

正秩和 (T+):

$$10 + 2 + 9 + 4.5 + 7 + 7 + 7 = 46.5$$

負秩和 (T^-):

$$2 + 2 + 4.5 = 8.5$$

檢定統計量 $W = \min(T+, T-) = 8.5$

Q2 檢定結論 Conclusion

樣本數 $n = 10$ ，單尾檢定 $\alpha = 0.05$ 。

查 Wilcoxon 臨界值表：臨界值 = 10。

決策規則：

結果： $8.5 < 10$ ，因此我們拒絕虛無假設 H_0 。

結論： 證據顯示研討會能顯著提升業務員的銷售表現。

alpha values							
n	0.001	0.005	0.01	0.025	0.05	0.10	0.20
5	--	--	--	--	--	0	2
6	--	--	--	--	0	2	3
7	--	--	--	0	2	3	5
8	--	--	0	2	3	5	8
9	--	0	1	3	5	8	10
10	--	1	3	5	8	10	14
11	0	3	5	8	10	13	17
12	1	5	7	10	13	17	21
13	2	7	9	13	17	21	26
14	4	9	12	17	21	25	31
15	6	12	15	20	25	30	36
16	8	15	19	25	29	35	42
17	11	19	23	29	34	41	48
18	14	23	27	34	40	47	55
19	18	27	32	39	46	53	62
20	21	32	37	45	52	60	69
21	25	37	42	51	58	67	77
22	30	42	48	57	65	75	86
23	35	48	54	64	73	83	94
24	40	54	61	72	81	91	104
25	45	60	68	79	89	100	113
26	51	67	75	87	98	110	124
27	57	74	83	96	107	119	134

alpha values							
n	0.001	0.005	0.01	0.025	0.05	0.10	0.20
28	64	82	91	105	116	130	145
29	71	90	100	114	126	140	157
30	78	98	109	124	137	151	169
31	86	107	118	134	147	163	181
32	94	116	128	144	159	175	194
33	102	126	138	155	170	187	207
34	111	136	148	167	182	200	221
35	120	146	159	178	195	213	235
36	130	157	171	191	208	227	250
37	140	168	182	203	221	241	265
38	150	180	194	216	235	256	281
39	161	192	207	230	249	271	297
40	172	204	220	244	264	286	313
41	183	217	233	258	279	302	330
42	195	230	247	273	294	319	348
43	207	244	261	288	310	336	365
44	220	258	276	303	327	353	384
45	233	272	291	319	343	371	402
46	246	287	307	336	361	389	422
47	260	302	322	353	378	407	441
48	274	318	339	370	396	426	462
49	289	334	355	388	415	446	482
50	304	350	373	406	434	466	503

Q3

皮爾森與斯皮爾曼相關

皮爾森相關

捕捉變數間的線性足跡。計算各點相對於平均數的離差乘積。對極端值極度敏感。

$$r_{xy} = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 \cdot \sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2}}$$

斯皮爾曼等級相關

將數值座標軸替換為排名序列，捕捉變數間的單調趨勢（遞增或遞減）。不限制線性關係。

$$\rho = 1 - \frac{6 \sum d^2}{n(n^2 - 1)}$$

原始觀測數據

觀測組別 (i)	1	2	3	4	5
DDT 濃度 (X)	65	117	98	122	130
蛋殼厚度 (Y)	0.52	0.53	0.49	0.49	0.37

● 樣本數 $n = 5$, 顯著水準 $\alpha = 0.05$ 。

Pearson 相關係數計算步驟

📊 第一步：計算各項總和

$$\Sigma X = 532, \Sigma Y = 2.4, \Sigma X^2 = 59302, \Sigma Y^2 = 1.1684, \Sigma XY = 251.71$$

√x 第二步：計算平方和離差 (SS)

$$S_{xx} = 2697.2, S_{yy} = 0.0164, S_{xy} = -3.65$$

= 第三步：代入相關係數公式

利用 S_{xy} 除以 (S_{xx} 和 S_{yy} 乘積的平方根)。

Pearson 相關係數結果

-0.549

Pearson r

$$r = \frac{S_{xy}}{\sqrt{S_{xx} S_{yy}}} = \frac{-3.65}{\sqrt{2697.2 \times 0.0164}}$$

結果顯示兩變數之間存在中等程度的負相關。

Spearman 等級轉換

X 值	X 排名	Y 值	Y 排名	差值 d	d ²
65	1	0.52	4	-3	9
117	3	0.53	5	-2	4
98	2	0.49	2.5	-0.5	0.25
122	4	0.49	2.5	1.5	2.25
130	5	0.37	1	4	16

註: Y 值 0.49 出現重複, 取排名平均值 $(2+3)/2 = 2.5$ 。 $\sum d^2 = 31.5$

Spearman 相關係數結果

-0.575

Spearman ρ

$$\rho = 1 - \frac{6 \sum d^2}{n(n^2 - 1)}$$

等級相關係數 ρ 與 r 非常接近，證實了負相關趨勢的穩定性。