0925統計學實習課

114-1統計學實習課

作業講解—第五題(有改數字)

Step1：將表格中的每一行、列的總和算出

Age Group	Yes (>1 school)	No (1 school)	Total
23 and under	195	210	405
24–26	312	368	680
27–30	172	254	426
31–35	71	187	258
36 and over	49	181	230
Total	**799**	**1200**	**1999**

Step2：條件機率題

(a) Given that a person applied to more than one school, what is the probability that the person is 24–26 years old?

條件機率：

$$P(24\text{–}26 \mid \text{Applied} > 1) = \frac{312}{799}$$

(b) Given that a person is in the 36-and-over age group, what is the probability that the person applied to more than one school?

條件機率：

$$P(\text{Applied} > 1 \mid \text{Age} \geq 36) = \frac{49}{230}$$

(d) Suppose a person is known to have applied to only one school. What is the probability that the person is 31 or more years old?

條件機率：

$$P(\text{Age} \geq 31 \mid \text{Applied} = 1) = \frac{187 + 181}{1200} = \frac{368}{1200}$$

Step3：交集與聯集

(c) What is the probability that a person is 24–26 years old or applied to more than one school?

聯集公式：

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

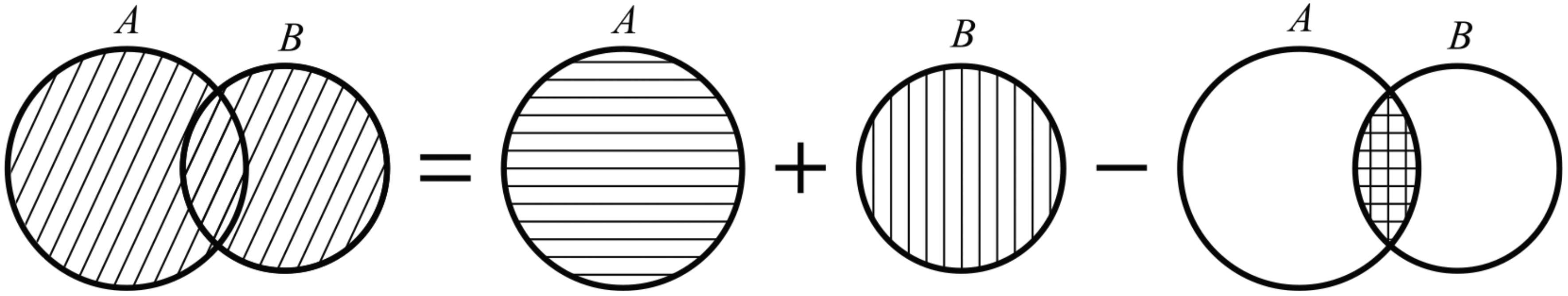
- $P(A) = \frac{680}{1999}$
- $P(B) = \frac{799}{1999}$
- $P(A \cap B) = \frac{312}{1999}$

所以：

$$P = \frac{680}{1999} + \frac{799}{1999} - \frac{312}{1999} = \frac{1167}{1999}$$

重點整理

5. 排容原理



A 集合或 B 集合裡的元素個數	=	A 集合的元素個數	+	B 集合的元素個數	−	A、B 集合共有的元素個數（在 A、B 集合各算一次，重複計算）

即 $n(A\cup B) = n(A) + n(B) - n(A\cap B)$

（接下頁）

重點整理

其中，$A \cup B$ 稱為 A 、B 集合的聯集，由 A 、B 所有的元素組成的集合；

$A \cap B$ 稱為 A 、B 集合的交集，由 A 、B 共有的元素組成的集合；

$n(A)$ 表示 A 集合的元素個數。

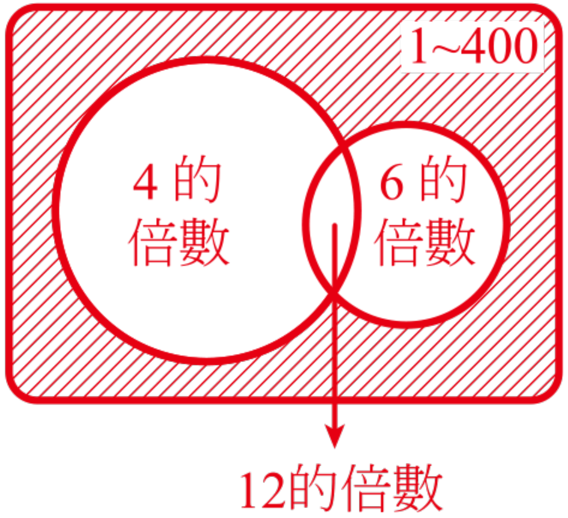
數學超連結

集合裡的元素不具有重複性和次序性，如 $\{1,2,3\} = \{1,1,2,3\} = \{3,1,2\}$ 都是 1、2、3 所成的集合。

（接下頁）

排容原理

1到 400 的整數中，既不能被 4 整除，也不能被 6 整除的數有幾個？



解 1～400 中，

4 的倍數有 100 個

6 的倍數有 66 個

12 的倍數有 33 個

能被 4 或 6 整除的有

$100+66-33=133$ 個

$\therefore$ 不能被 4 和 6 整除的有

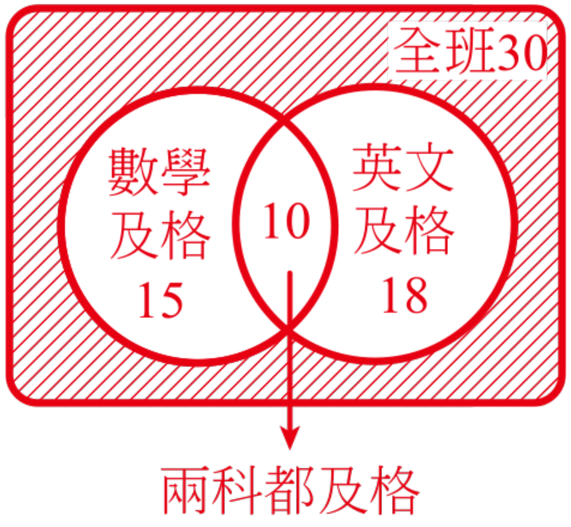
$400-133=267$ 個

排容原理

某次段考，全班30人，數學及格的有15人，英文及格的有18人，兩科都及格的有10人，則：

(1)兩科都不及格的有幾人？

(2)恰一科及格的有幾人？



解

(1) 數學或英文及格的人數

$=15+18-10=23$

$\therefore$ 兩科都不及格人數

$=$(全班人數)

$-$(數學或英文及格人數)

$=30-23=7$（人）

(2) 恰一科及格的人數

$=$(數學或英文及格人數)

$-$(兩科都及格人數)

$=23-10=13$（人）

Step4：判斷是否獨立

(e) Is the number of schools applied to independent of age?

檢查獨立性：

例如，若獨立，應滿足：

$$P(24\text{–}26 \text{ and } {>}1) = P(24\text{–}26) \cdot P({>}1)$$

- 左邊：$\frac{312}{1999}$
- 右邊：$\frac{680}{1999} \times \frac{799}{1999}$

這兩個數字不同 → **不獨立**。

獨立概念與公式

概念：

「兩個事件獨立」的意思是：知道其中一件事發生 **不會改變** 另一件事發生的機率。
換句話說，若 A、B 獨立，知道 A 發生後，關於 B 發生的機率仍然和不知道 A 時一樣——A **並沒有提供**關於 B 的任何資訊。

舉例：

- 投一枚公平的硬幣，第一次是正面（A），第二次是正面（B）——兩次投擲通常被當成獨立事件。
- 相反地，如果「今天下雨」和「路面是濕的」就**不是獨立**，因為下雨會大幅提高路面變濕的機率。

獨立概念與公式

公式：

對事件 A 和 B：

等價敘述 A（交集乘法）

$$A\text{ 與 }B\text{ 獨立} \iff P(A \cap B) = P(A)\,P(B)$$

等價敘述 B（條件機率）

$$A\text{ 與 }B\text{ 獨立} \iff P(A \mid B) = P(A) \quad (\text{或等價地 } P(B \mid A) = P(B))$$

- 通常在題目中用「交集=相乘」去判斷是否獨立

獨立公式推導過程

由條件機率定義推導出獨立的乘法公式

已知條件機率定義（前提：$P(B) > 0$）：

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

步驟 1 — 得出乘法法則（乘回去）

把上式兩邊同乘以 $P(B)$：

$$P(A \cap B) = P(B)\,P(A \mid B).$$

步驟 2 — 從條件不變性得到獨立的積公式

「若 A 與 B 獨立」，直觀定義之一是「知道 B 發生後，A 的機率不變」，即

$$P(A \mid B) = P(A).$$

把這個等式代入乘法法則：

$$P(A \cap B) = P(B)\,P(A \mid B) = P(B)\,P(A) = P(A)P(B).$$

這就推得獨立的乘法形式：$P(A \cap B) = P(A)P(B)$。