12/11統計學實習課

114-1統計學實習課

第九章複習

114-1統計學實習課

9.1 假設檢定

題目 1：

某研究團隊開發一款新的保健食品，宣稱能讓成年人平均專注力測試分數提升到 **80 分以上**。
為了檢驗此 claims，研究者將收集一份樣本。

請寫出本研究的 **虛無假設** 與 **對立假設**。

解答 1：

H_0 : $\mu \leq 80$ (虛無：沒有提升到 80)
H_a : $\mu > 80$ (對立：平均超過 80)
(此為右尾檢定)

題目 2：

某品牌瓶裝橄欖油標示每瓶含量為 **750 ml**。為驗證標示是否準確，抽取數瓶做測量。

請寫出本研究的 **虛無假設** 與 **對立假設**，並說明這是哪一類（左尾 / 右尾 / 雙尾）檢定。

解答 2：

H_0： $\mu = 750$（標示正確）

H_a： $\mu \neq 750$（標示不正確）

（此為雙尾檢定）

9.2 第一類與第二類誤差

題目 ：

某醫院想測試新型疫苗能否將感染率降低到 **5% 以下**。假設母體比例為 p。

設定假設為：

- $H_0 : p \geq 0.05$
- $H_a : p < 0.05$

請用文字解釋：

(a) 第一類錯誤代表什麼情況？

(b) 第二類錯誤代表什麼情況？

解答 ：

Type I（第一類錯誤）：在 H_0 真（真實感染率 ≥ 0.05）時錯誤拒絕 H_0。在本情境下，即誤判疫苗有效（認為感染率 < 5%）而實際上並未降到 5% 以下。

Type II（第二類錯誤）：在 H_0 假（真實感染率 < 0.05）時錯誤未拒絕 H_0。即錯失發現疫苗真有效的機會（認為疫苗沒有把感染率降到 5% 以下，但實際上是有降的）。

9.3 單尾 z 檢定（σ 已知）

題目 ：

一家牛奶工廠標榜其家庭號鮮奶平均容量至少 2000 ml。
已知生產線容量的標準差為 $\sigma = 25$ ml。
抽取 $n = 40$ 瓶樣本，得到樣本平均為 1992 ml。

在顯著水準 $\alpha = 0.01$ 下：

(a) 寫出假設
(b) 計算檢定統計量
(c) 使用 p-value 法決定是否拒絕 H_0

解答：

(a) 假設：

H_0：$\mu \geq 2000$；H_a：$\mu < 2000$（下尾檢定）

(b) 計算標準誤與 z 值（逐步計算）：

- $\sqrt{n} = \sqrt{40} = 6.324555\ldots$
- $\sigma_{\bar{x}} = \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = \dfrac{25}{6.324555\ldots} = 3.952847\ldots$
- $z = \dfrac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma_{\bar{x}}} = \dfrac{1992 - 2000}{3.952847\ldots} = \dfrac{-8}{3.952847\ldots} = -2.024\ (約)$

(c) p-value（下尾）：

- $p = \Pr(Z \leq -2.024) \approx 0.0215.$

判斷：因 $p = 0.0215 > 0.01$，在 α=0.01 下**不拒絕** H_0。結論：以 1% 顯著水準，沒有足夠證據宣稱平均低於 2000 ml。

9.3 雙尾 z 檢定 (σ 已知)

題目 ：

某燈泡製造商預期其燈泡平均壽命為 900 小時。
已知壽命標準差為 σ = 80 小時。
抽樣 n = 60 顆燈泡，樣本平均為 930 小時。

以 α = 0.05 做兩尾檢定：

(a) 寫出假設
(b) 計算 z 值
(c) 判斷是否拒絕 H_0 (p-value 法)

解答：

1. 標準誤：

$$SE = \frac{80}{\sqrt{60}}.$$

$\sqrt{60} = 7.745966692\ldots$，故 $SE = 80/7.7459667 = 10.329$（約 10.329）。

2. z 值：

$$z = \frac{930 - 900}{10.329} = \frac{30}{10.329} = 2.9047375\ (\text{約 } 2.905).$$

3. p-value（雙尾）：
   單尾上尾機率 $= 1 - \Phi(2.9047375) \approx 0.0018378$。
   雙尾 p-value $= 2 \times 0.0018378 \approx 0.0036756$（約 0.00368）。

4. 決策（α = 0.05）：
   因 $p \approx 0.00368 < 0.05$，**拒絕** H_0。結論：樣本提供足夠證據顯示平均壽命不同於（且高於）900 小時。

9.4 t 檢定（σ 未知）右尾檢定

題目 ：

某飯店希望確認其住客平均滿意度是否高於 **4.2 分（滿分 5）**。

抽樣 **n = 55** 名住客，得到樣本平均 **4.35** 分，樣本標準差 **s = 0.62**。

以 α = 0.05：

(a) 寫出假設

(b) 計算 t 值

(c) 用 p-value 決策（可回答範圍即可）

解答 ：

(a) 假設：$H_0 : \mu \leq 4.2$，$H_a : \mu > 4.2$。

(b) 計算 t 值：

- $\sqrt{n} = \sqrt{55} = 7.416198487\ldots$
- 標準誤 $SE = \dfrac{s}{\sqrt{n}} = \dfrac{0.62}{7.416198487\ldots} = 0.083591$ (約)
- $t = \dfrac{\bar{x} - \mu_0}{SE} = \dfrac{4.35 - 4.2}{0.083591} = \dfrac{0.15}{0.083591} = 1.794$ (約)
- 自由度 $df = n - 1 = 54.$

(c) p-value（右尾）：查 t 分布或以近似常態估計，$t(54) = 1.794$ 的右尾機率約 0.039（大約介於 0.025 與 0.05 之間）。

判斷：因 $p \approx 0.039 < 0.05$，拒絕 H_0。結論：在 5% 顯著水準下，有證據顯示平均滿意度大於 4.2。

9.4 t 檢定（σ 未知）兩尾檢定

題目 ：

某連鎖速食店預期午餐尖峰時段平均出餐時間為 **3.0 分鐘**。經抽樣 **n = 20** 筆資料，樣本平均 **3.4 分鐘**，樣本標準差 **s = 1.1**。

在 α = 0.05 下：

(a) 寫出假設
(b) 計算 t 值
(c) 是否拒絕 H_0？

解答 ：

(a) 假設：$H_0 : \mu = 3.0$，$H_a : \mu \neq 3.0$。

(b) 計算 t 值：

- $\sqrt{n} = \sqrt{20} = 4.472135955\ldots$
- $SE = \dfrac{1.1}{4.472135955\ldots} = 0.2462\ (\text{約})$
- $t = \dfrac{3.4 - 3.0}{0.2462} = \dfrac{0.4}{0.2462} = 1.624\ (\text{約})$
- 自由度 $df = 19.$

(c) p-value（雙尾）：

- 單尾 $P(t \geq 1.624)$（df=19）約介於 0.06 與 0.10 之間 → 估計單尾 ≈ 0.06–0.07，
- 雙尾 p-value ≈ 0.12–0.14（精確用軟體約 0.122）。

  判斷：因 p-value ≈ 0.12 > 0.05，**不拒絕** H_0。結論：沒有足夠證據說平均出餐時間與 3.0 分鐘不同。

9.5 母體比例檢定

題目 ：

某電商推廣計畫想提升新客戶占比至 **至少 35%**。
隨機抽取 **n = 500** 個新訂單，其中 **x = 195** 是新客戶。

以 α = 0.05 做右尾檢定：

(a) 寫出假設
(b) 計算檢定統計量 z
(c) 判斷是否拒絕 H_0

解答 ：

(a) 假設：$H_0 : p \leq 0.35$，$H_a : p > 0.35$。

(b) 計算檢定統計量：

- $\hat{p} = \dfrac{195}{500} = 0.39.$
- 標準誤 $SE = \sqrt{\dfrac{p_0(1-p_0)}{n}} = \sqrt{\dfrac{0.35 \times 0.65}{500}} = \sqrt{\dfrac{0.2275}{500}} = \sqrt{0.000455} = 0.021330\ (約).$
- $z = \dfrac{\hat{p} - p_0}{SE} = \dfrac{0.39 - 0.35}{0.021330} = \dfrac{0.04}{0.021330} = 1.875\ (約).$

(c) p-value（右尾）：

- $p = \Pr(Z \geq 1.875) = 1 - \Phi(1.875) \approx 0.0304$（常用表或軟體約 0.0304）。

  判斷：因 $p \approx 0.0304 < 0.05$，拒絕 H_0。結論：有證據支持新客比例已超過 35%。

9.7 型二錯誤 β 計算

題目 ：

某咖啡機製造商只接受平均沖煮溫度至少 **92°C** 的產品。

假設已知溫度標準差為 **σ = 4°C**，抽樣 **n = 25** 台咖啡機。

拒絕域：若樣本平均 ≤ 90.8°C，則拒絕 H_0。

求當真實平均為 **90°C** 時，型二錯誤 β 的值。

解答 ：

標準誤 $SE = \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = \dfrac{4}{\sqrt{25}} = \dfrac{4}{5} = 0.8.$

在 μ = 90 時，型二錯誤 β 為「不拒絕 H_0 的概率」，即 $\Pr(\bar{X} > 90.8 \mid \mu = 90)$。

將樣本平均標準化：

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{SE} = \frac{90.8 - 90}{0.8} = \frac{0.8}{0.8} = 1.0.$$

$\beta = \Pr(Z > 1.0) = 1 - \Phi(1.0) = 1 - 0.84134 = 0.15866$ (約 0.1587).

9.8 計算所需樣本數

題目 ：

某公司希望檢定其新型手機的平均電池續航是否至少 **15 小時**。

母體標準差假定為 **σ = 2 小時**。

公司希望：

- 第一類錯誤 $\alpha = 0.05$
- 若真實平均只有 **14 小時**，第二類錯誤 $\beta \le 0.10$

請計算「最小所需樣本數」。

解答 ：

公式（單尾情況）：

$$n = \frac{(z_\alpha + z_\beta)^2 \sigma^2}{(\mu_0 - \mu_a)^2}.$$

- $\mu_0 - \mu_a = 15 - 14 = 1.$
- z_α （單尾，α=0.05） = 1.645.
- z_β （因 β = 0.10，對應 z = 1.2816） ≈ 1.2816.
- $z_\alpha + z_\beta = 1.645 + 1.2816 = 2.9266.$
- $(z_\alpha + z_\beta)^2 = 2.9266^2 = 8.5632\ (約).$
- $\sigma^2 = 2^2 = 4.$

代入：

$$n = \frac{8.5632 \times 4}{1^2} = 34.2528.$$

向上取整（樣本數須為整數且通常向上取）：
$\boxed{n = 35}$。

第四次作業講解

114-1統計學實習課

題目 1：

Ahmadi, Inc. 原來車款在高速公路平均 50 mpg。新引擎主張平均**超過**50 mpg。獨立測試取樣 49 輛，樣本平均 52 mpg，樣本標準差 5 mpg。

(a) 寫出虛無與對立假設。

(b) 選擇合適的檢定分配，計算檢定統計量與 p-value。

(c) 以 α = 0.05 下結論。

解答 1：

(a) $H_0 : \mu = 50$，$H_a : \mu > 50.$（右尾檢定）

(b) 因為母體變異數未知且 $n = 49$（可用 t 檢定）：

檢定統計量：

$$t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} = \frac{52 - 50}{5/\sqrt{49}} = \frac{2}{5/7} = 2.8.$$

自由度 $df = 48$。一尾 p-value $= P(T_{48} > 2.8) \approx 0.00367.$

(c) 因為 p-value $0.00367 < 0.05$，拒絕 H_0。結論：有統計證據（在 5% 顯著水準下）支持製造商新車平均超過 50 mpg。

題目 2：

宣稱每塊餅乾至少含 9 顆巧克力豆。抽樣 $n = 36$ 顆，樣本平均 8.5 顆，樣本標準差 2.5。

(a) 寫出假設。

(b) 用臨界值法在 5% 顯著水準檢定。

(c) 用 p-value 法檢定。

(d) 若真實平均為 8，計算第二類錯誤（β）的機率（近似）。

解答 2：

(a) $H_0 : \mu \geq 9$（主張至少 9 顆為虛無，以保守立場），$H_a : \mu < 9$（小於 9）。（左尾檢定）

(b)/(c) 檢定統計量：

$$t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} = \frac{8.5 - 9}{2.5/\sqrt{36}} = \frac{-0.5}{2.5/6} = -1.2.$$

自由度 $df = 35$。左尾 p-value $= P(T_{35} < -1.2) \approx 0.119.$

臨界值法：$t_{0.05,35} \approx -1.6896$。檢定統計量 -1.2 > -1.6896（不落在拒絕域），因此以 α=0.05 不拒絕 H_0。p-value 方法也同樣因 p=0.119>0.05，不拒絕 H_0。

(d) 若真實 $\mu = 8$，計算 β（在此我們以 t 臨界值近似並使用常態近似）：

臨界 t 值（左尾）$t_c = t_{0.05,35} \approx -1.6896.$ 對應樣本平均的拒絕閾值：

$$\bar{x}_c = 9 + t_c \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} \approx 9 + (-1.6896) \cdot \frac{2.5}{6} \approx 8.2960.$$

在真實 $\mu = 8$ 下，$\bar{X} \sim N(8,\ \sigma/\sqrt{n} \approx 2.5/6)$。
$\beta = P(\text{不拒絕 } H_0 \mid \mu = 8) = P(\bar{X} > 8.2960) \approx 0.2387.$

（所以當真實平均是 8 時，漏判為「至少 9 顆」的機率約 23.9%。）

題目 3：

教練主張隊員可呼出**超過**3.4 公升。抽樣 10 名隊員，觀測值（公升）：
3.5, 3.7, 3.9, 3.4, 3.6, 3.8, 3.5, 3.6, 3.7, 3.8。

(a) 寫出假設。
(b) 建立 95% 信賴區間（母體平均）。
(c) 計算 p-value，並以 α = 0.01 給出結論。

解答 3：

樣本數 $n = 10$。樣本平均與樣本標準差：
$\bar{x} = 3.65$，$s \approx 0.1581.$

(a) $H_0 : \mu = 3.4$，$H_a : \mu > 3.4.$（右尾檢定）

(b) 95% 信賴區間（df=9，$t_{0.025,9} \approx 2.262$）：

$$\bar{x} \pm t_{0.025,9} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} = 3.65 \pm 2.262 \cdot \frac{0.1581}{\sqrt{10}}$$

標準誤 $= 0.1581/\sqrt{10} \approx 0.05$。
邊際誤差 $\approx 2.262 \times 0.05 \approx 0.1131$。
95% CI $\approx (3.65 - 0.1131,\ 3.65 + 0.1131) = (3.5369,\ 3.7631).$

解答 3：

(c) 檢定統計量：

$$t = \frac{3.65 - 3.4}{0.1581/\sqrt{10}} = \frac{0.25}{0.05} = 5.0.$$

df = 9。右尾 p-value $= P(T_9 > 5.0) \approx 0.00037.$

結論（α = 0.01）：p-value ≪ 0.01，因此拒絕 H_0。有強烈證據顯示排球女隊員的平均「呼出量」大於 3.4 公升。

題目 4：

顧問想知道日間與夜間學生的分數變異數是否相同。抽樣結果：

日間 $n_1 = 20, s_1 = 8.2$。夜間 $n_2 = 28, s_2 = 12.5$。以 α=0.05 檢定變異數是否相等。

解答 4：

我們檢定 $H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ vs $H_a : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$（雙尾 F 檢定）。把較大的樣本變異數放在分子以得到 $F \geq 1$。

樣本方差比：

$$F = \frac{s_2^2}{s_1^2} = \frac{12.5^2}{8.2^2} \approx 2.3238.$$

對應自由度：分子 $df_1 = n_2 - 1 = 27$，分母 $df_2 = n_1 - 1 = 19$。

上尾機率 $P(F_{27,19} \geq 2.3238) \approx 0.03052.$ 兩尾 p-value 約 $2 \times 0.03052 \approx 0.0610.$

結論：p-value ≈ 0.061 > 0.05，因此在 α=0.05 下**不拒絕** H_0。（雖然分散數差異方向性較明顯，但以雙尾檢定結果仍未達 5% 顯著。）

題目 5：

以「法庭審判中的證據（例如目擊證詞）」說明統計上的虛無假設與對立假設、為何把某一方設為虛無假設，以及你是否認為單靠目擊證詞可起訴（請簡短說明）。

解答 5：

(a) 常見設定：H_0 = 被告**無罪**（或無違法行為），H_a = 被告**有罪**（或有違法行為）。法庭系統和統計檢定都傾向以「無罪推定／保守的虛無假設」為出發點。

(b) 選 H_0 = 無罪 的理由：這是保護被告的原則（避免以錯誤證據定罪，類比統計上的型一錯誤）；檢方需提出足夠證據來拒絕虛無假設（即達到合理懷疑以外的證明力）。

(c) 目擊證詞能否單獨作為起訴依據？實務上通常**不建議**單靠目擊證詞來做最終定罪，因為目擊證詞容易受記憶、光線、壓力、偏見影響。理想情況下應與其他客觀證據（物證、科學鑑定、監視錄影、通聯紀錄等）相互印證以降低誤判風險。