第 2 章

迴歸歸分析的推論

Inferenes in Regression and Correlation Analysis

- ❖首先將針對迴歸的參數 β_0 及 β_1 做推論，並對這些參數做區間估計及檢定。
- ❑接著將討論，在給定一個X時，Y的機率分配之平均數E｛Y｝的區間估計、新觀測值Y的預測區間及迴歸線的**信賴帶**（confidence band）。
- ❑以及要討論迴歸分析中的變異分析法、**一般線性檢定法**（general linear test approach ）及**描述性的觀聯量度**（descriptive Measure of association ）。
- ▪ 最後將探討一個**相關係數**（correlation coefficient）即當X及Y都是隨機變數時，衡量X與Y之間關係的一個量。

- 貫穿本章以及第一部份以後的各章節，除非另有說明，否則皆假設適用常態誤差迴歸模型(1.24)。此一模型即是

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + \varepsilon_i \tag{2.1}$$

其中 β_0 及 β_1 為參數；

X_i 為已知常數；

ε_i 獨立且服從 $N(0, \sigma^2)$。

2.1 關於 β_1 的推論

- 參數 β_1（即模型（2.1）之迴歸線的斜率）的推論感興趣。例如，一個市場分析人員研究產品銷售量（Y）與廣告支出（X）之間的關聯時，可能會希望獲得β_1的區間估計，因為它提供了每一單位廣告的支出，平均可增加多少產品銷售的訊息。
- 研究人員也會對β_1的檢定有興趣，特別是下列的形式:

$$H_0: \quad \beta_1 = 0$$

$$H_a: \quad \beta_1 \neq 0$$

- 當 $\beta_1 = 0$ 時，表示 X 與 Y 之間並無直線關聯性存在。

- 圖 2.1 說明了當 $\beta_1=0$ 的情形。此時迴歸線是水平的，而Y的機率分配的平均數都相等 。由於在此模型中所有Y的機率分配都是具有固定變異的常態分配，且當 $\beta_1=0$ 時所有平均數也都相等，所以當 $\beta_1=0$ 時，Y的機率分配都是相同的，這在圖 2.1 中也可以看得到。對於常態誤差迴歸模型（2.1），$\beta_1=0$ 代表Y與X之間沒有線性關聯，同時表示Y與X之間沒有其他任何形式的關連。

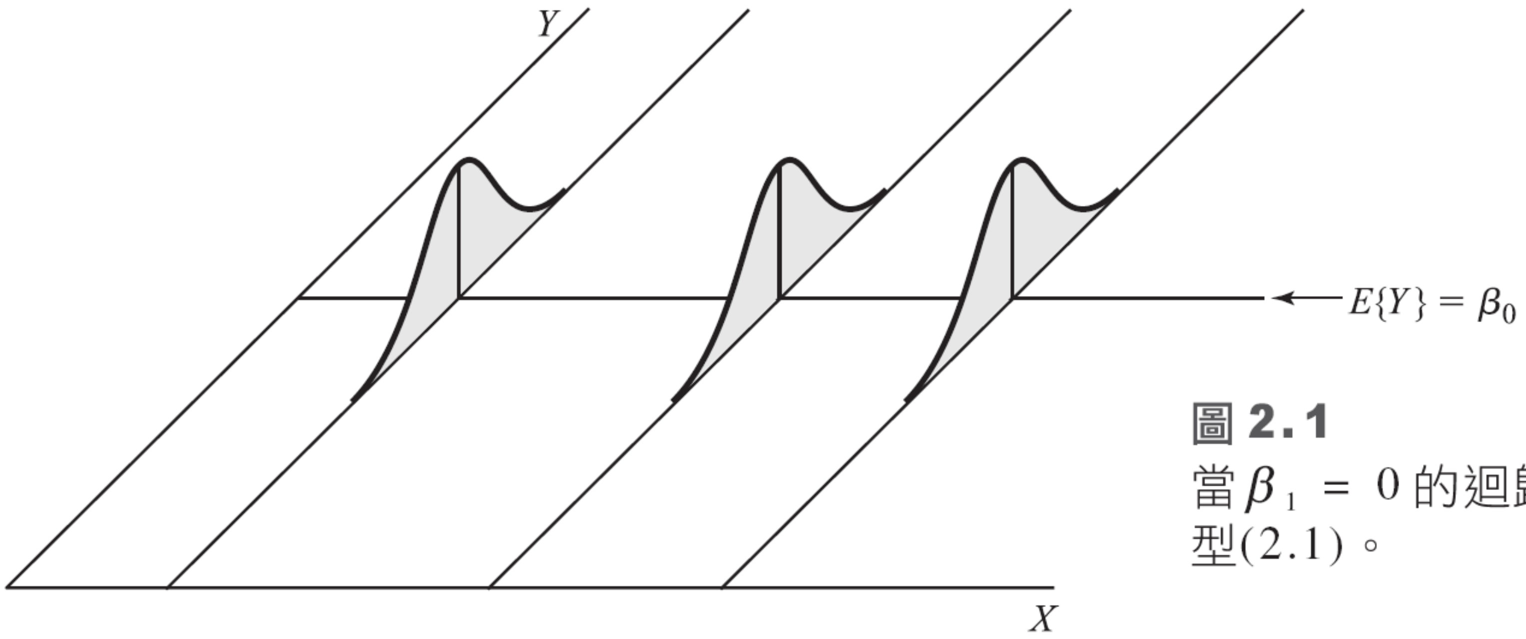


圖 2.1
當 $\beta_1=0$ 的迴歸模型(2.1)。

b_1的抽樣分配

- 定義於(1.10a)中的點估計式 b_1 重新列式如下：

$$b_1 = \frac{\sum (X_i - \overline{X})(Y_i - \overline{Y})}{\sum (X_i - \overline{X})^2} \tag{2.2}$$

所謂 b_1 的抽樣分配，是指固定預測變數 X 的水準，重複抽樣所得到不同樣本而造成不同 b_1 之值的現象。

- 對於常態誤差迴歸模型 (2.1)， b_1的抽樣分配為常態，且具有平均數及變異數：

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + \varepsilon_i \tag{2.3}$$

$$\boxed{E\{b_1\} = \beta_1} \tag{2.3a}$$

$$\boxed{\sigma^2\{b_1\} = \frac{\sigma^2}{\sum (X_i - \overline{X})^2}} \tag{2.3b}$$

要證明此結果，我們必須了解到， b_1是諸觀測值Y_i的線性組合。

b_1 是諸觀測值Y_i的線性組合 定義於(2.2)中的b_1 可以改寫成如下形式：

$$\boxed{b_1 = \sum k_i Y_i} \qquad (2.4)$$

其中

$$k_i = \frac{X_i - \overline{X}}{\sum (X_i - \overline{X})^2} \qquad (2.4a)$$

- 可以看得出來 k_i 是諸 X_i 的函數，當X_i 固定時，k_i 也是固定的。因此，b_1為諸 Y_i 的線性組合，而其組合係數只是諸固定 X_i 的函數。

下列 2.5-2.7式 請參閱

- 組合系數 k_i 具有一些稍後會用得到的性質：

$$\sum k_i = 0 \qquad (2.5)$$

$$\sum k_i X_i = 1 \qquad (2.6)$$

$$\sum k_i^2 = \frac{1}{\sum (X_i - \overline{X})^2} \qquad (2.7)$$

常態性

b_1 的抽樣分配具有常態性是因為 b_1 是諸 Y_i 的線性組合，且由模型（2.1），諸 Y_i 是相互獨立地服從常態分配，而附錄 A 的（A.40）指出獨立常態隨機變數的線性組合也是服從常態分配 (pa-8)。

平均數

利用（2.5）及（2.6），即可得到 $\boxed{E\{b_1\} = \beta_1}$

變異數

應用（2.7）可以得到
$$\boxed{\sigma^2\{b_1\} = \frac{\sigma^2}{\sum (X_i - \overline{X})^2}}$$

- **估計變異數** 可以估計 b_1 的抽樣分配的變異數：

$$\sigma^2\{b_1\} = \frac{\sigma^2}{\sum(X_i - \overline{X})^2}$$

只要將參數 σ^2 以它的不偏估計式誤差均方 *MSE* 取代之即可：

$$\boxed{s^2\{b_1\} = \frac{MSE}{\sum(X_i - \overline{X})^2}} \qquad (2.9)$$

點估計式 $s^2\{b_1\}$ 是 $\sigma^2\{b_1\}$ 的一個不偏估計式。取**正平方根**，可以得到 $\sigma\{b_1\}$ 的點估計式 $s\{b_1\}$ -- 估計標準差 。

$(b_1-\beta_1) / s\{b_1\}$ 的抽樣分配

- 由於 b_1 是常態分配，所以其**標準化統計量** $(b_1-\beta_1)/s\{b_1\}$ 是一個標準常態分配的隨機變數。一般來說，會用$s\{b_1\}$來估計σ$\{b_1\}$ 。
- 當一個統計量經過**標準化**，但其分母為估計的標準差而非真實的標準差時，稱之為 **學生化統計量** (studentize statistic)。
- 一個關於此學生化統計量 $(b1-\beta1)/s\{b1\}$的重要定理：

  對於迴歸模型(2.1)，$\dfrac{b_1-\beta_1}{s\{b_1\}}$ 服從自由度$(n - 2)$

  的 t分配，即 $t(n - 2)$ (2.10)

在迴歸模型中有兩個參數（β_0 及β_1）需要估計，因此損失兩個自由度。

β_1的信賴區間

- 由於 $(b_1 - \beta_1) / s\{b_1\}$ 服從 t 分配，可以作下面的機率陳述：

$$P\left\{t(\alpha/2;n-2) \le (b_1-\beta_1)/s\{b_1\} \le t(1-\alpha/2;n-2)\right\} = 1-\alpha \quad (2.12)$$

α 是顯著係數，一般常用0.05，在這邊 $t(\alpha/2; n-2)$ 定義為具有自由度$(n-2)$的 t 分配之第 $(\alpha/2)$ 100 百分位數。因為 t 分配有對稱於 0 的特性，所以

$$t(\alpha/2;n-2) = -t(1-\alpha/2;n-2) \quad (2.13)$$

- 利用(2.13)，(2.12)可以改寫成：

$$P\left\{b_1 - t(1-\alpha/2;n-2)s\{b_1\} \le \beta_1 \le b_1 + t(1-\alpha/2;n-2)s\{b_1\}\right\} = 1-\alpha$$

(2.14)

- 由於對於 β_1 的所有值，(2.14) 均成立，所以 β_1 的 **1 - α 信賴界限**為

$$\boxed{b_1 \pm t(1-\alpha/2; n-2)s\{b_1\}} \qquad (2.15)$$

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + \varepsilon_i$$

$$\boxed{s^2\{b_1\} = \frac{MSE}{\sum (X_i - \overline{X})^2}}$$

考慮第 1 章中 Toluca 公司的例子。管理者希望以 95% 的**信賴係數**(*confidence coefficient*)來估計β_1。表 2.1 彙總了一些前一章所得到的結果。首先，我們需要先得到 $s\{b_1\}$：

$$\boxed{s^2 = MSE = \frac{SSE}{n-2} = \frac{\sum(Y_i - \hat{Y}_i)^2}{n-2} = \frac{\sum e_i^2}{n-2}}$$

$$s^2\{b_1\} = \frac{MSE}{\sum(X_i - \bar{X})^2} = \frac{2,384}{19,800} = .12040$$

$$s\{b_1\} = .3470$$

表 **2.1**
第 1 章中 Toluca 公司例子的一些結果。

$n = 25$	$\bar{X} = 70.00$
$b_0 = 62.37$	$b_1 = 3.5702$
$\hat{Y} = 62.37 + 3.5702X$	$SSE = 54,825$
$\sum(X_i - \bar{X})^2 = 19,800$	$MSE = 2,384$
$\sum(Y_i - \bar{Y})^2 = 307,203$	

EXCEL 軟體	係數	標準誤	t 統計	P-值	下限 95%	上限 95%
截距 b_0	62.3659	26.1774	2.3824	0.0259	8.214	116.518
X 變數 1 b_1	3.5702	0.3470	10.2896	0.0000	2.852	4.288
		P2-8	P2-9	P2-10	P2-8	信賴界限

$$s^2\{b_1\} = \frac{MSE}{\sum(X_i - \overline{X})^2} = \frac{2,384}{19,800} = .12040$$

$$s\{b_1\} = .3470$$

此估計的標準差在圖2.2 MINITAB的輸出報表中，是位在欄標示 "Stdev" 與列標示 "X" 的位置。圖 2.2 除了重複在第 1 章中 MINITAB 的輸出報表

圖 2.2
MINITAB 迴歸輸出的部分— Toluca 公司案例。

```
The regression equation is
Y = 62.4 + 3.57 X

Predictor        Coef        Stdev      t-ratio        p
Constant        62.37        26.18         2.38    0.026
X              3.5702       0.3470        10.29    0.000

s = 48.82       R-sq = 82.2%      R-sq(adj) = 81.4%

Analysis of Variance

SOURCE         DF         SS         MS        F          p
Regressio       1     252378     252378   105.88      0.000
Error          23      54825       2384
Total          24     307203
```

Pag B-4

$$b_1 \pm t(1-\alpha/2; n-2)s\{b_1\}$$

t 分佈的 t(A,ν)

因為要求信賴係數是 95%，我們需要 $t(.975;\ 23)$。從附錄 B 的表 B.2，可以找到 $t(.975;\ 23) = 2.069$。因此由(2.15)，可以得到 95% 的信賴區間為

$$3.5702 - 2.069(.3470) \le \beta_1 \le 3.5702 + 2.069(.3470)$$

$$2.85 \le \beta_1 \le 4.29$$

因此，在 .95 的信賴係數下，我們估計批量每增加一個單位，所需的平均工作時數增加量約介於 2.85 到 4.29 小時之間。

EXCEL 軟體	係數	標準誤	t 統計	P-值	下限 95%	上限 95%
截距	62.3659	26.1774	2.3824	0.0259	8.214	116.518
X 變數 1	3.5702	0.3470	10.2896	0.0000	2.852	4.288
		P2-8	P2-9	P2-10	P2-8	信賴界限

關於β_1的檢定

- 由於$(b_1-\beta_1)/s\{b_1\}$服從自由度為 n-2 的 t 分配，因此 β_1 的檢定可利用t 分配進行。

雙邊檢定(Two-Sided Test) Toluca 公司的一位成本分析師想藉由迴歸模型(2.1)來檢定是否工作時間與批量大小之間具有線性關聯，即是否 $\beta_1=0$，於是他做了下面兩個假設：

$$\begin{aligned}H_0&:\beta_1=0\\H_a&:\beta_1\neq 0\end{aligned} \tag{2.16}$$

分析師希望將此檢定的型一錯誤控制在$\boxed{\alpha=.05}$。由於之前所得到的β_1之95% 信賴區間並未包含到 0，因此可以立刻得到結論是 H_a。

$2.85\leq\beta_1\leq 4.29$

(2.16)的一個明確的檢定程序是利用統計量

$$\boxed{t^*=\frac{b_1}{s\{b_1\}}} \tag{2.17}$$

這個檢定統計量在顯著水準控制在α下的決策法則是：

$$\boxed{t^* = \frac{b_1}{s\{b_1\}}} \qquad \begin{array}{l} 若\ |t^*| \le t(1-\alpha/2; n-2)，則結論為\ H_0 \\ 若\ |t^*| > t(1-\alpha/2; n-2)，則結論為\ H_a \end{array} \tag{2.18}$$

在 Toluca 公司的例子裡，$\alpha = .05$、$b_1 = 3.5702$、而 $s\{b_1\} = .3470$，又經查表得到 $\boxed{t(.975;\ 23) = 2.069}$。於是，檢定問題(2.16)的決策法則是：

$$\boxed{t^* = \frac{b_1}{s\{b_1\}}} \qquad \begin{array}{l} 若\ |t^*| \le 2.069，則結論為\ H_0 \\ 若\ |t^*| > 2.069，則結論為\ H_a \end{array}$$

由於 $|t^*| = |3.5702/.3470| = 10.29 > 2.069$，所以結論是 H_a，也就是 $\beta_1 \ne 0$，或是說工作時間與批量大小之間是具有線性關聯的。檢定統計量的值 $t^* = 10.29$，在圖 2.2 MINITAB 的輸出報表中，是出現在標示 "t-ratio" 的那一欄及標示 "X" 的那一列的對應位置。

圖 2.2
MINITAB 迴歸輸出的部分— Toluca 公司案例。

```
The regression equation is
Y = 62.4 + 3.57 X

Predictor        Coef       Stdev     t-ratio        p
Constant        62.37       26.18        2.38    0.026
X              3.5702      0.3470       10.29    0.000

s = 48.82       R-sq = 82.2%      R-sq(adj) = 81.4%

Analysis of Variance

SOURCE        DF          SS         MS         F        p
Regressio      1      252378     252378    105.88    0.000
Error         23       54825       2384
Total         24      307203
```

EXCEL 軟體	係數	標準誤	t 統計	P-值	下限 95%	上限 95%
截距	62.3659	26.1774	2.3824	0.0259	8.214	116.518
X 變數 1	3.5702	0.3470	10.2896	0.0000	2.852	4.288
		P2-8	P2-9	P2-10	P2-8	信賴界限

要計算此樣本的雙邊檢定之 P- 值(P-value)，首先需求出單邊檢定的 P- 值，$P\{t(23) > t^* = 10.29\}$，從表 B.2 可以知道此機率的值小於 .0005。許多統計計算工具或電腦套裝軟體都會提供真正的機率值；因為它幾乎等於 0，所以記為 0+。於是，此雙邊檢定的 P- 值就是 $2(0+) = 0+$。由於這雙邊檢定的 P- 值小於指定的顯著水準 $\alpha = .05$，所以可以直接得到 H_a 是正確的結論。在圖 2.2 MINITAB 的輸出報表中，P- 值是位在標示 "p" 的那一欄及標示 "X" 的那一列的對應位置，它顯現的值為 0.000。

附錄 Pag B-5， $t\,(0.9995, 23) = 3.768$

- **說明**

當檢定 β_1 是否為 0 所得到結論是 $\beta_1 \neq 0$ 時，Y與X之間的關聯有時就稱之為 線性統計關聯 (linear statistical association)

單邊檢定(One-Sided Test) 假設該分析師要檢定β_1是否為正，並要求此檢定的顯著水準在$\alpha = .05$，則此檢定問題的假設如下：

$$H_0 : \beta_1 \le 0$$
$$H_a : \beta_1 > 0$$

於是基於檢定統計量(2.17)的決策法則將是：

$$\boxed{t^* = \frac{b_1}{s\{b_1\}}}$$

若 $t^* \le t(1-\alpha; n-2)$，則結論為 H_0

若 $t^* > t(1-\alpha; n-2)$，則結論為 H_a

對於$\alpha = .05$，我們需要求得 $t(.95; 23) = 1.714$。由於 $t^* = 10.29 > 1.714$，我們的結論是H_a，也就是β_1是正的。

藉由單邊檢定之P-值也可以得到相同的結論。前面例題1已經得到單邊 P- 值是 0+，所以小於 .05，結論是 H_a。

附錄Pag B-4 t (0.95, 23) = 1.714

說明

1. P-值有時又稱作是觀察到的**顯著水準**(*level of significance*)。
2. 許多科學性的書刊在報告檢定統計量時，通常也會報告其P-值。因此讀者可以在任意不同的顯著水準α下，藉由比較P-值與α值的大小，來對此檢定作結論。
3. 使用一些統計計算工具或電腦套裝軟體來做檢定的人必須要很小心，要確知分析輸出報表的P-值，到底是單邊還是雙邊。許多常被使用的標示，例如PROB或P，並無法反映出該P-值到底是單邊還是雙邊。
4. 有時候，我們也可能會需要去檢定β_1是否等於一個非零的特定值β_{10}，它可能是一個歷史上的規範、一個比較過程的某一特定值、或是工程上的一個規格。這檢定問題的假設就是：

$$\begin{aligned} H_0 &: \beta_1 = \beta_{10} \\ H_a &: \beta_1 \neq \beta_{10} \end{aligned} \tag{2.19}$$

而適用的檢定統計量就是：

4. 有時候，我們也可能會需要去檢定β_1是否等於一個非零的特定值β_{10}，它可能是一個歷史上的規範、一個比較過程的某一特定值、或是工程上的一個規格。這檢定問題的假設就是：

$$H_0: \beta_1 = \beta_{10}$$
$$H_a: \beta_1 \neq \beta_{10} \qquad \textbf{(2.19)}$$

而適用的檢定統計量就是：

$$t^* = \frac{b_1 - \beta_{10}}{s\{b_1\}} \qquad \boxed{t^* = \frac{b_1}{s\{b_1\}}} \qquad \textbf{(2.20)}$$

此檢定的決策法則仍是得利用(2.18)，只是t^*改成定義為(2.20)。

當要檢定H_0: $\beta_1 = \beta_{10} = 0$時，(2.20)的檢定統計量就簡化為(2.17)。

■

EXCEL 軟體	係數	標準誤	t 統計	P-值	下限 95%	上限 95%
截距	62.3659	26.1774	2.3824	0.0259	8.214	116.518
X 變數 1	3.5702	0.3470	10.2896	0.0000	2.852	4.288
		P2-8	P2-9	P2-10	P2-8	信賴界限

2.2 關於 β_0 的推論

- 只有在少數的情況下我們才會想要對迴歸線的截距 β_0 做推論，這情形是在當模型涵蓋 $X=0$ 時。

b_0 的抽樣分配

- 定義於(1.10b)的點估計式 b_0 重列如下：

$$b_0 = \overline{Y} - b_1\overline{X} \tag{2.21}$$

所謂 b_0 的抽樣分配，就是針對預測變數 X 固定在某特定水準下重複抽樣所得到不同 b_0 值的現象。

對於迴歸模型(2.1)，b_0的抽樣分配是常態的，且其平均數及變異數是： (2.22)

$$\boxed{E\{b_0\} = \beta_0} \tag{2.22a}$$

$$\boxed{\sigma^2\{b_0\} = \sigma^2\left[\frac{1}{n} + \frac{\overline{X}^2}{\sum(X_i - \overline{X})^2}\right]} \tag{2.22b}$$

- b_0的抽樣分配具有常態分配，而 b_0抽樣分配的平均數及變異數，也可以用類似 b_1的方法得到。
- $\sigma^2\{b_0\}$的點估計式可以藉由將 σ^2 換成其點估計式 MSE 來得到：

$$\boxed{s^2\{b_0\} = MSE\left[\frac{1}{n} + \frac{\bar{X}^2}{\sum(X_i - \bar{X})^2}\right]} \tag{2.23}$$

而其正平方根 $s\{b_0\}$，是$\sigma\{b_0\}$的估計式。

- $(b_0-\beta_0)/s\{b_0\}$ 的抽樣分配

類似定理(2.10)的 b_1，對 b_0 也有一個定理：

對於迴歸模型(2.1)， $\dfrac{b_0 - \beta_0}{s\{b_0\}}$ *服從自由度 (n - 2) 的 t 分配，即 t(n - 2)* (2.24)

- β_0的信賴區間

β_0的$1-\alpha$ 信賴界限也可以得到，就是：

$$\boxed{b_0 \pm t(1-\alpha/2; n-2)s\{b_0\}} \tag{2.25}$$

如同先前 Toluca 公司的例子，其迴歸模型的範圍並未涵蓋到批量大小為 $X=0$ 的情形，因此迴歸參數 β_0 在此並不具實際意義。雖然如此，如果 β_0 的 90% 的信賴界限還需要求出的話，我們仍可以經由求得 $t(.95;23)$ 及 $s\{b_0\}$ 的值來計算。藉由表 B.2，可以找到 $t(.95;23)=1.714$；利用表 2.1 的資料以及(2.23)，我們可以得到：

$$s^2\{b_0\}=MSE\left[\frac{1}{n}+\frac{\overline{X}^2}{\sum(X_i-\overline{X})^2}\right]=2,384\left[\frac{1}{25}+\frac{(70.00)^2}{19,800}\right]=685.34$$

或

$$s\{b_0\}=26.18$$

圖 2.2 MINITAB 輸出報表顯示出此估計的標準差是位在標示 "Stdev" 的那一欄及標示 "Constant" 的那一列的對應位置。

	係數	標準誤	t 統計	P-值	下限 95%	上限 95%
截距	62.3659	26.1774	2.3824	0.0259	8.214	116.518
X 變數 1	3.5702	0.3470	10.2896	0.0000	2.852	4.288
		P2-8	P2-9	P2-10	P2-8	信賴界限

The regression equation is
Y = 62.4 + 3.57 X

Predictor	Coef	Stdev	t-ratio	p
Constant	62.37	26.18	2.38	0.026
X	3.5702	0.3470	10.29	0.000

s = 48.82   R-sq = 82.2%   R-sq(adj) = 81.4%

Analysis of Variance

SOURCE	DF	SS	MS	F	p
Regressio	1	252378	252378	105.88	0.000
Error	23	54825	2384		
Total	24	307203			

$t(.95;\ 23) = 1.714 \qquad s\{b_0\} = 26.18$

非 95% 信賴區間

而 β_0 的 $\boxed{90\%}$ 信賴區間就是：

$$62.37 - 1.714(26.18) \le \beta_0 \le 62.37 + 1.714(26.18)$$

$$17.5 \le \beta_0 \le 107.2$$

在此要再一次提醒讀者，此一信賴區間並不必然會提供有意義的訊息。

$$\boxed{b_0 \pm t\left(1-\alpha/2; n-2\right)s\{b_0\}}$$

	係數	標準誤	t 統計	P-值	下限 95%	上限 95%
截距	62.3659	26.1774	2.3824	0.0259	8.214	116.518
X 變數 1	3.5702	0.3470	10.2896	0.0000	2.852	4.288
		P2-8	P2-9	P2-10	P2-8	信賴界限

2.3 對 β_0 及 β_1 做推論時的一些考慮

- 偏離常態性的效應
  - 如果Y的機率分配並不是常態，但並未嚴重偏離常態，則 b_0 及 b_1 的抽樣分配仍會近似常態，利用 t 分配仍然可得近似預定的信賴常數或顯著水準。
  - 一般性的條件下，當樣本數增加時，它的分配將趨近常態分配。而對於大樣本，t 的值可以藉由標準常態分配的 z 值來取代。
- 信賴係數及錯誤風險的解釋
  - 對於迴歸模型（2.1）是假設諸 X_i 是已知的常數，因此信賴係數及檢定的錯誤風險，都是解釋為在固定X的值和所觀測值到的樣本相同之下重複抽樣的結果。

- 例如，在 Toluca 公司的例子中，建構了一個信賴係數為 95% 的 β_1 的信賴區間。這個係數表示，若在X固定成和已得到的資料相同之下，重複抽樣取得很多樣本，並且每一組樣本都採用同一公式建構 β_1 的 95% 的信賴區間，則這些區間中大約 95% 會涵蓋到真正的 β_1 。

▪ 分隔 *X* 的水準

- 分別檢查 b_0 與 b_1 的變異數公式（2.3b）及（2.22b），可以發現當 n 與σ^2 給定時，這些變異數將受到觀測值 X 水準的間距影響。比如說，若 X 的水準越分散，$\sum(X_i - \bar{X})^2$ 的量就越大，而 b_1 的變異數就越小
- $\sigma^2\{b_1\} = \dfrac{\sigma^2}{\sum(X_i - \bar{X})^2}$ (2.3b) $\sigma^2\{b_0\} = \sigma^2\left[\dfrac{1}{n} + \dfrac{\bar{X}^2}{\sum(X_i - \bar{X})^2}\right]$ (2.22b)

- 檢定力

- 對 β_0 與 β_1 做檢定的**檢定力**（power of tests），可以從附錄的表 B.5 查到。例如，考慮要對 β_1 做（2.19）的一般性檢定：

$$H_0：\beta_1 = \beta_{10}$$

$$H_a：\beta_1 \neq \beta_{10}$$

- 檢定的統計量：

$$t^* = [b_1 - \beta_{10}] / s\{b_1\}$$

這個檢定統計量在顯著水準控制在α下的決策法則是：

若 $|t^*| \le t(1-\alpha/2; n-2)$，則結論為 H_0

若 $|t^*| > t(1-\alpha/2; n-2)$，則結論為 H_a

- 這個檢定的檢定力，就是當 H_a 是對時，決策法則導引到結論是 H_a 的機率。

- 這個檢定的檢定力就是：

$$檢定力 = P\left\{ \left| t^* \right| > t(1-\alpha/2; n-2) \middle| \delta \right\} \qquad (2.26)$$

其中 δ 為**非置中量數** (noncentrality measure) —— 即量測 β_1 的真實值與 β_{10} 相距多遠的一個指標：

$$\boxed{\delta = \frac{\left|\beta_1 - \beta_{10}\right|}{\sigma\{b_1\}}} \qquad (2.27)$$

- 表 B.5 (B-14) 列出在各種不同的自由度（*df*）下，雙邊 t 檢定在 $\alpha = .05$ 及 $\alpha = .01$ 時的檢定力。
- 以Toluca公司的例子來說明這個表B.5的說法。要檢定的問題是:

$\mathbf{H_0}$： $\beta_1 = \beta_{10} = 0$

$\mathbf{H_a}$： $\beta_1 \neq \beta_{10} = 0$

- 如果希望知道當 $\beta_1 = 1.5$ 時這個檢定的檢定力，則必須要知道誤差項變異數 σ^2。假設未知的變異數是 $\sigma^2 = 2500$，利用先前的資料，可以得到本例的 $\sigma^2\{b_1\}$ 為:

$$\delta = \frac{|\beta_1 - \beta_{10}|}{\sigma\{b_1\}}$$

$$\sigma^2\{b_1\} = \frac{\sigma^2}{\sum (X_i - \overline{X})^2} = \{2500/19800\} = 0.1263$$

- 開根號後 $\sigma\{b_1\} = 0.3553$。於是 $\delta = |1.5 - 0| \div 0.3553 = 4.22$。進入表 B.5(Pag B-14)，找 $\alpha = 0.5$ 且自由度= 25-2=23 的部分，對 $\delta = 4.00$ 和 $\delta = 5.00$ 做線性內插，可得到:

$$0.97 + [(4.22-4.00)/(5.00-4.00)](1.00-0.97) = 0.9766 \approx 0.98$$

- 因此，當 $\beta_1 = 1.5$ 時，會做出結論為 H_a 的機率約0.98；換言之，若 $\beta_1 = 1.5$，我們幾乎確定會斷定，工作時數與批量大小之間，是有線性關聯的。

- 而對 β_0 檢定的檢定力也可以藉由類似的方法經由表 B.5 得到。對於單邊檢定，應用表B.5時須先將表中的顯著水準減半，才是單邊檢定的顯著水準。

2.4　$E\{Y_h\}$ 的區間估計

- 令 X_h 表示想估計平均反應的X水準，X_h可能是在樣本中出現過的一個值，也可能是在模型範圍內預測變數的另一個值。$X = X_h$ 時的平均反應記為 $E\{Y_h\}$，(1.12)給予$E\{Y_h\}$的點估計式 $\hat{Y}_h$ 是：

$$\hat{Y}_h = b_0 + b_1 X_h \tag{2.28}$$

- $\hat{Y}_h$ 的抽樣分配

如同前面所提到過的幾個抽樣分配，$\hat{Y}_h$ 的抽樣分配是指：固定預測變數X的水準，重複抽樣並計算$\hat{Y}_h$，所得到的不同 $\hat{Y}_h$ 值的現象。

對於常態誤差迴歸模型(2.1)，$\hat{Y}_h$ 的抽樣分配為常態，並具有如下的平均數與變異數：　(2.29)

$$E\{\hat{Y}_h\} = E\{Y_h\} \tag{2.29a}$$

$$\sigma^2\{\hat{Y}_h\} = \sigma^2\left[\frac{1}{n} + \frac{(X_h - \bar{X})^2}{\sum(X_i - \bar{X})^2}\right] \tag{2.29b}$$

常態性

因$\hat{Y}_h$是諸Y_i的線性組合，故可以得到$\hat{Y}_h$的抽樣分配是常態分配。

平均數

由(2.29a)知，$\hat{Y}_h$是$E\{Y_h\}$的不偏估計量。

$$E\{\hat{Y}_h\} = \beta_0 + \beta_1 X_h$$

變異數

- 由(2.29b)可以注意到，$\hat{Y}_h$抽樣分配的變異數受到X_h與$\overline{X}$距離多遠的影響，即受到$\boxed{(X_h-\overline{X})^2}$的影響。$X_h$離$\overline{X}$越遠，則$(X_h-\overline{X})^2$就越大，$\hat{Y}_h$的變異數也越大。圖 2.3 可以對這個現象做一個直觀的解釋。在同一組X值之下重複抽取兩個樣本所得到的兩條樣本迴歸線。

$$\sigma^2\{\hat{Y}_h\}=\sigma^2\left[\frac{1}{n}+\frac{(X_h-\overline{X})^2}{\sum(X_i-\overline{X})^2}\right] \qquad (2.29b)$$

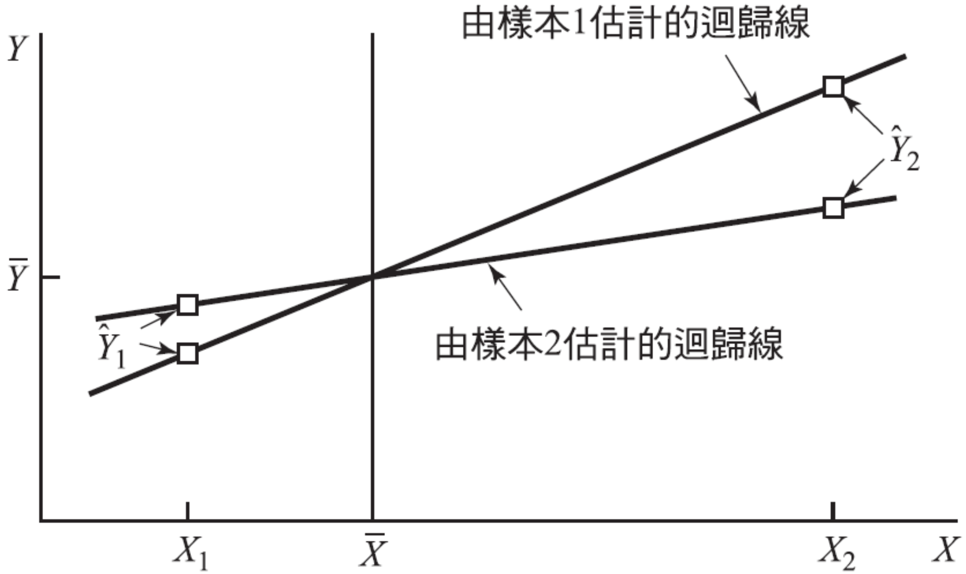


圖 2.3
具有相同平均數$\overline{Y}$及$\overline{X}$的兩樣本其不同樣本之b_1的變化對$\hat{Y}_h$的影響。

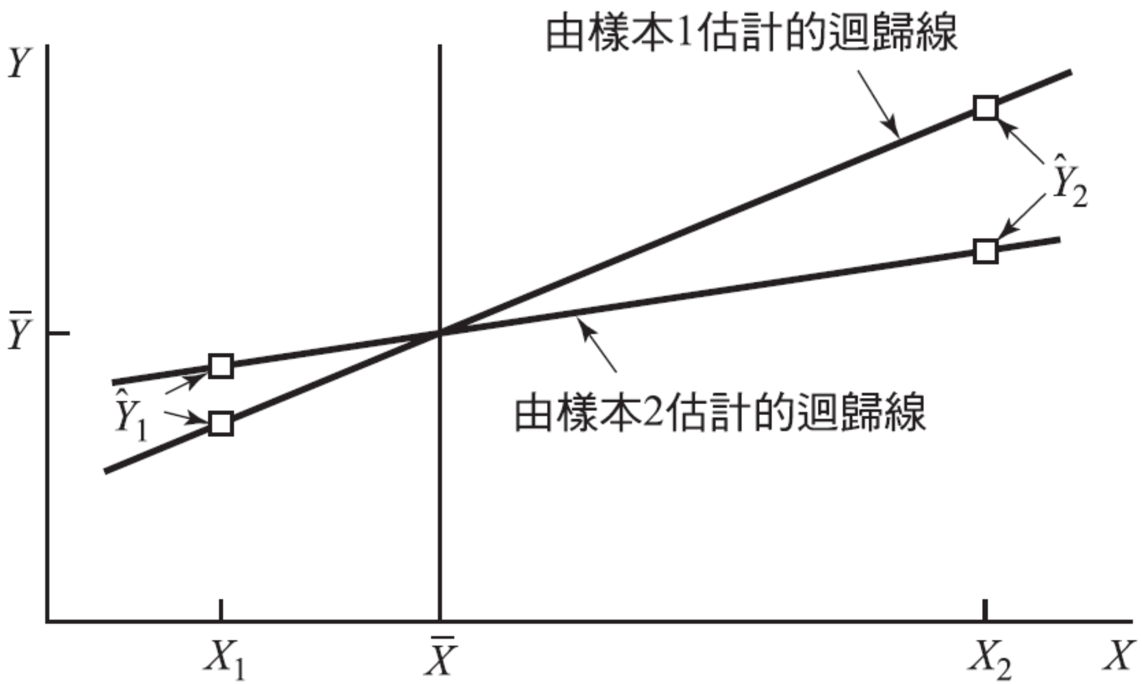


圖 2.3
具有相同平均數 $\bar{Y}$ 及 $\bar{X}$ 的兩樣本其不同樣本之 b_1 的變化對 $\hat{Y}_h$ 的影響。

- $\hat{Y}_h$ 在不同樣本間的變異，當 X_h 遠離平均數 $\bar{X}$ 時，會比 X_h 接近平均數時來得大。
- 當 *MSE* 取代(2.29b)的σ^2時，我們可以得到的估計變異數：

$$\boxed{s^2\{\hat{Y}_h\} = MSE\left[\frac{1}{n} + \frac{(X_h - \bar{X})^2}{\sum(X_i - \bar{X})^2}\right]} \quad (2.30)$$

- 而$\hat{Y}_h$的估計標準差 $s\{\hat{Y}_h\}$ 即為 $s^2\{\hat{Y}_h\}$的正方根。

$(\hat{Y}_h - E\{\hat{Y}_h\}) / s\{\hat{Y}_h\}$的抽樣分配

- 在迴歸模型(2.1)下，$\dfrac{\hat{Y}_h - E\{Y_h\}}{s\{\hat{Y}_h\}}$ 服從 $t(n-2)$。

(2.32)

$E\{\hat{Y}_h\}$ 的信賴區間

- 利用定理(2.32)的t分配，$E\{Y_h\}$的信賴區間其 $1-\alpha$ 信賴界限為：

$$\boxed{\hat{Y}_h \pm t(1-\alpha/2; n-2)\, s\{\hat{Y}_h\}} \tag{2.33}$$

$$\boxed{s^2\{\hat{Y}_h\} = MSE\left[\frac{1}{n} + \frac{(X_h - \bar{X})^2}{\sum (X_i - \bar{X})^2}\right]}$$

$$s^2\{\hat{Y}_h\} = MSE\left[\frac{1}{n} + \frac{(X_h - \overline{X})^2}{\sum (X_i - \overline{X})^2}\right] \qquad \hat{Y}_h \pm t(1-\alpha/2; n-2)\, s\{\hat{Y}_h\}$$

再回到 Toluca 公司的例子，假設我們要找批量 $X_h = 65$ 單位時 $\hat{Y}_h$ 的 90% 信賴區間。利用先前表 2.1 的結果得點估計值 $\hat{Y}_h$：

一般程式內定 95%

$$\hat{Y}_h = 62.37 + 3.5702(65) = 294.4$$

其次求估計的標準差 $s\{\hat{Y}_h\}$，利用(2.30)得

$$s^2\{\hat{Y}_h\} = 2,384\left[\frac{1}{25} + \frac{(65-70.00)^2}{19,800}\right] = 98.37$$

$$s\{\hat{Y}_h\} = 9.918$$

要計算 90% 的信賴區間，需要 $t(.95;\ 23) = 1.714$。因此，由(2.33)我們可以得到具 .90 的信賴區間：

$$294.4 - 1.714(9.918) \le E\{Y_h\} \le 294.4 + 1.714(9.918)$$

$$277.4 \le E\{Y_h\} \le 311.4$$

在信賴係數 .90下，我們獲得的結論是：當批量為65單位時，所需的平均工作時數在 277.4 到 311.4 小時之間的某處。由此可知，對平均工作時數的估計，其精確度可算是中等。

例題 2

假設 Toluca 公司想要計算批量大小 $X_h = 100$ 單位時，$E\{Y_h\}$ 的 90% 信賴區間，我們需要下面的結果：

$$\hat{Y}_h = 62.37 + 3.5702(100) = 419.4$$

$$s^2\{\hat{Y}_h\} = 2{,}384\left[\frac{1}{25} + \frac{(100 - 70.00)^2}{19{,}800}\right] = 203.72$$

$$s\{\hat{Y}_h\} = 14.27$$

$$t(.95;23) = 1.714$$

因此，可以得到 90% 的信賴區間為

$$419.4 - 1.714(14.27) \le E\{Y_h\} \le 419.4 + 1.714(14.27)$$

$$394.9 \le E\{Y_h\} \le 443.9$$

我們可以注意到此信賴區間比例題1寬了些，這是因為本例題中 X_h 的水準($X_h = 100$)與 $\bar{X} = 70$ 的距離比例題 1 中 X_h 的水準($X_h = 65$)來得遠。

$$277.4 \le E\{Y_h\} \le 311.4$$

在信賴係數 .90下，我們獲得的結論是：當批量為65單位時，所需的平均工作時數在 277.4 到 311.4 小時之間的某處。由此可知，對平均工作時數的估計，其精確度可算是中等。

2.5 新觀測值的預測 (Prediction of New bservation)

- 考慮給定預測變數X之一個標準，預測一個新觀測值Y的問題。
- 一大學中的一位入學許可主管估計了已入學學生的高中平均等第成績（GPA）和其大學第一年GPA的迴歸關聯。他希望預測一名高中GPA為3.5的入學申請者其進入大學第一年的GPA，以供是否准許入學的部分參考訊息。
- 要預測的新觀測值Y是一次新試行的結果，和迴歸分析所依據的資料是獨立的。以 X_h 表示此一新試行的 X 水準，而Y的新觀測值用 $Y_{h(new)}$ 表示。假設適用基本樣本資料的迴歸模型對於新觀測值仍然適用。
- 前一節所討論的估計平均反應 $E\{Y_h\}$ 和本節所要討論的預測新反應值 $Y_{h(new)}$，兩者間有根本上的差別。前者是估計Y之分配的平均數，而後者是預測由Y的分配所取出的個別結果。

一、參數已知時 $Y_{h(new)}$ 的預測區間 (prediction interval)

✓為說明新觀測值 $Y_{h(new)}$ 之預測區間(prediction interval)的性質，首先假設所有的迴歸參數皆已知，之後捨棄這個假設，並做適當的修正。

- 假設在入學審查的例子中，迴歸模型的參數已知如下:

$$\beta_0 = 0.10 \text{，} \beta_1 = 0.95\text{，}E\{Y\}=0.10 + 0.95X\text{，}\sigma = 0.12$$

入學許可主管考慮一名高中GPA為 $X_h = 3.5$ 的申請者。高中平均是 3.5 的學生其大學平均成績為

$$E\{Y_h\} = 0.10 + 0.95(3.5) = 3.425$$

- 圖 2.4 顯示 $X_h = 3.5$ 時 Y 的分配情形，其平均數 $E\{Y_h\} = 3.425$，標準差 $\alpha = 0.12$；而其分配是**常態**，與迴歸模型(2.1)一致

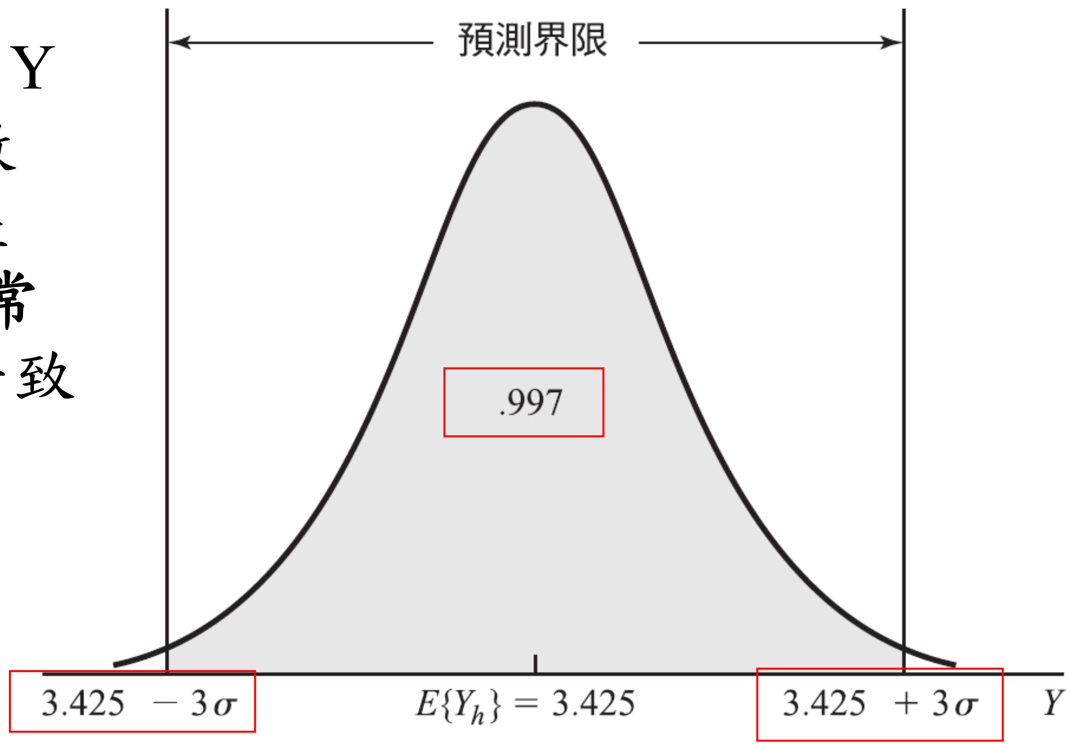


圖 2.4
參數已知時 $Y_{h(new)}$ 的預測。

- 假設預測高中GPA是 $X_h = 3.5$ 的申請者其大學第一年的GPA 在 $E\{Y_h\} \pm 3\sigma$，$\Rightarrow 3.425 \pm 3\,(0.12)$
  故預測區間為 $3.065 \le Y_{h(new)} \le 3.785$
  因為常態機率分配在平均數左右三倍標準差之內約占了99.7%，此預測區間正確預測一位高中GPA是3.5的申請者其大學第一年的成績表現之機率是 0.997。

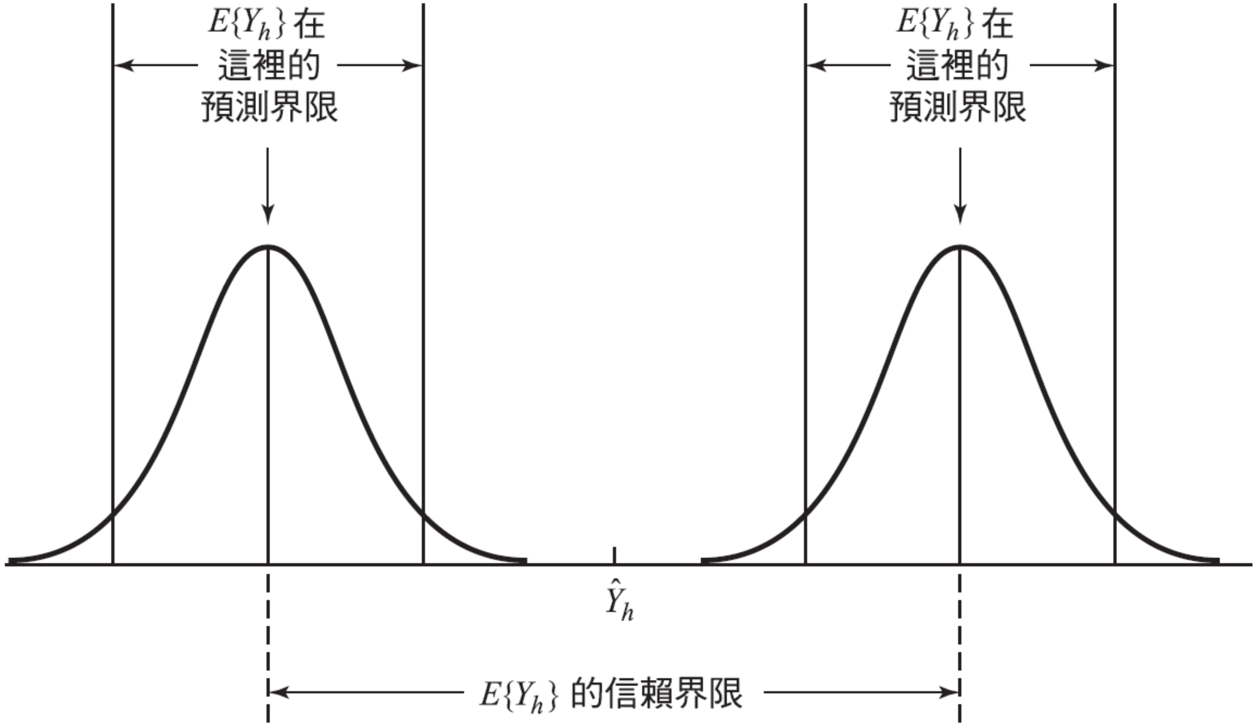
- 因為預測區間相當寬。此預測並不十分精確，但至少此預測告訴入學許可主管，這位申請者進入大學後第一年的成績至少可達 **3.0 GPA**。（3.065 $\leq Y_{h(new)} \leq$ 3.785）
- 預測區間是否有用，取決於區間的寬度和使用者所需要的精確度。
- 一般若常態誤差迴歸模型 (2.1) 的參數已知，則$Y_{h(new)}$ 的 1-α 預測區間為:

$$E\{Y_h\} \pm Z(1-\alpha/2)\cdot\sigma \tag{2.34}$$

以$E\{Y_h\}$為界限的中心點，得到的是固定正確預測機率之下的最短區間，**Z**標準常態分佈(表 B.1)

二、參數未知時 $Y_{h(new)}$ 的預測區間

圖 2.5
參數未知時 $Y_{h(new)}$ 的預測。



- 當迴歸參數未知時，必須先估計：Y 的平均數用 $\hat{Y}_h$ 估計，而Y之變異數用 MSE 估計。

- 圖 2.5 顯示有兩個 Y 的機率分配，對應到 $E\{Y_h\}$ 的信賴區間上下界限值。因為不知道平均數 $E\{Y_h\}$ 究竟在哪裡，只能用信賴區間估計它，所以不能確定Y之分配的位置。

- 圖 2.5 顯示了兩個Y的分配所對的預測界限。由於我們不能確定Y分配的位置，$Y_{h(new)}$ 的預測界限顯然需考量兩個元素，如圖2.5所示:

  1. Y 分配的位置之可能變異。

  2. Y 機率分配內之變異。

- 給定 X_h，一新觀測值 $Y_{h(new)}$ 的預測界限可利用下列定理求得： 在常態誤差迴歸模型(2.1)的下，

$$\{ Y_{h(new)} - \hat{Y}_h \} / s\{pred\} \text{，服從 } t\,(n\text{-}2) \qquad (2.35)$$

(2.35) 的學生化統計量的**分子**用了點估計量 $\hat{Y}_h$，而非平均數 $E\{Y_h\}$，這是因我們並不知道真正的平均數，所以無法用它來做預測。

- 上述學生化統計量**分母**中預測量的估計標準差 s{pred} 即將由下述定義。

- 由定理 (2.35)，一新觀測值 $Y_{h(new)}$ 的 $1-\alpha$ 預測區間可依一般方式（比較(2.35)和(2.10)，又以 $\hat{Y}_h$ 對應 b_1，$Y_{h(new)}$ 對應 β_1）得：
$$\boxed{\hat{Y}_h \pm t(1-\alpha/2; n-2)\, s\{\text{pred}\}} \qquad (2.36)$$
- 預測誤差變異數以 $\sigma^2\{\text{pred}\}$ 表示，由(A.31b)得

$$\sigma^2\{\text{pred}\} = \sigma^2\left\{Y_{h(\text{new})} - \hat{Y}_h\right\} = \sigma^2\left\{Y_{h(\text{new})}\right\} + \sigma^2\left\{\hat{Y}_h\right\} = \sigma^2 + \sigma^2\left\{\hat{Y}_h\right\} \qquad (2.37)$$

- 預測誤差變異數 $\sigma^2\{\text{pred}\}$ 的一個不偏估計量為
$$\boxed{s^2\{\text{pred}\} = MSE + s^2\left\{\hat{Y}_h\right\}} \qquad (2.38)$$
- 應用(2.30)，上列預測誤差的不偏估計量可表示如下：

$$\boxed{s^2\{\text{pred}\} = MSE\left[1 + \frac{1}{n} + \frac{(X_h - \bar{X})^2}{\sum (X_i - \bar{X})^2}\right]} \qquad (2.38a)$$

Toluca公司研究批量和工作時數的關聯主要目的是得到不同批量下平均所需工作時數的訊息，用以決定最適批量。但公司也有興趣於知道是否此迴歸關聯可用來預測個別批次需要的工作時數。假設下一批要生產的批量是 $X_h = 100$ 單位，希望得到 90% 預測區間。我們需要 $t(.95; 23) = 1.714$；又由前面得到

$$\hat{Y}_h = 419.4 \quad s^2\{\hat{Y}_h\} = 203.72 \quad MSE = 2{,}384$$

依(2.38)得

$$\boxed{s^2\{\text{pred}\} = MSE + s^2\{\hat{Y}_h\}}$$

$$s^2\{\text{pred}\} = 2{,}384 + 203.72 = 2587.72$$

$$s\{\text{pred}\} = 50.87$$

$332.2 \le Y_{h(new)} \le 506.6$

故由(2.36)得 $Y_{h(\text{new})}$ 的 90% 預測區間

$$419.4 - 1.714(50.87) \le Y_{h(\text{new})} \le 419.4 + 1.714(50.87)$$

$$\boxed{332.2 \le Y_{h(\text{new})} \le 506.6}$$

在信賴係數 .90 之下，我們預測下一批生產 100 單位時所需工作時數會落在 332 至 507 小時之間的某處。

$$s^2\{\text{pred}\} = 2,384 + 203.72 = 2587.72$$
$$s\{\text{pred}\} = 50.87$$

上述預測區間太寬的主要原因是在同一批量下各批次間工作時數的變異太大；$MSE = 2,384$ 占估計的預測變異數 $s^2\{\text{pred}\} = 2,587.72$ 之 92% 。

- 預測區間類似信賴區間，但在觀念上不同，信賴區間是對一個參數的推論，並企圖讓該區間涵蓋參數值，而預測區間則是對一個隨機變數—新觀測值 $Y_{h(new)}$—之實現值

▪ 給定X_h時 m 個新觀測值的平均數之預測

- 有時候可能需要預測給定預測變數水準，m 個Y新觀測值的平均。
- 以 $\bar{Y}_{h(new)}$ 代表要預測之新的Y觀測值平均數，假設這些新觀測值相互獨立，可得其$1-\alpha$預測界限為

$$\boxed{\hat{Y}_h \pm t(1-\alpha/2; n-2)s\{\text{predmean}\}} \quad (2.39)$$

其中

$$\boxed{s^2\{\text{predmean}\} = \frac{MSE}{m} + s^2\{\hat{Y}_h\}} \quad (2.39a)$$

亦即

$$\boxed{s^2\{\text{predmean}\} = MSE\left[\frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{(X_h - \bar{X})^2}{\sum(X_i - \bar{X})^2}\right]} \quad (2.39b)$$

在 Toluca 公司的例子，我們要預測生產三批同樣 $X_h = 100$ 單位所需時數的平均 $\bar{Y}_{h(\text{new})}$。由先前的結果

$$\hat{Y}_h = 419.4 \qquad s^2\{\hat{Y}_h\} = 203.72$$
$$MSE = 2{,}384 \qquad t(.95;23) = 1.714$$

因此，得到

$$s^2\{\text{predmean}\} = \frac{2{,}384}{3} + 203.72 = 998.4$$
$$s\{\text{predmean}\} = 31.60$$

故此三批零件平均每批工作時數之預測區間為

$$419.4 - 1.714(31.60) \le \bar{Y}_{h(\text{new})} \le 419.4 + 1.714(31.60)$$

$332.2 \le Y_{h(\text{new})} \le 506.6$

$$365.2 \le \bar{Y}_{h(\text{new})} \le 473.6$$

注意到上述預測區間比同樣生產100單位之單一批次所需工作時數的預測區間要來得短，因為現在是預測三個批次所需工作時數的平均數。

將 $\bar{Y}_{h(\text{new})}$ 的預測界限乘以3，則得到三個批次所需總工作時數的預測區間

$$\boxed{1{,}095.6 = 3(365.2) \le \text{總工作時數} \le 3(473.6) = 1{,}420.8}$$

所以每批生產100單位，則生產三批所需人力，在90%的信心之下，介於1,096 至 1,421 工時之間。

2.6 迴歸線的信賴帶

- 得到整個迴歸線$E\{Y\} = \beta_0 + \beta_1 X$ 的信賴帶(confidence band)。
- 迴歸模型(2.1)之迴歸線，其Working-Hotelling $1-\alpha$ 信賴帶在任一水準 X_h 具有下列兩邊界值：

$$\boxed{\hat{Y}_h \pm W s\{\hat{Y}_h\}} \tag{2.40}$$

其中

$$\boxed{W^2 = 2F(1-\alpha; 2, n-2)} \tag{2.40a}$$

- 而$\hat{Y}_h$ 和 $s\{\hat{Y}_h\}$ 分別定義於(2.28)及(2.30)。上述邊界值公式形式上和(2.33)在 X_h 處之平均反應的信賴界限相似，只要把t乘數換成 W 乘數。故當X_h遠離 X 觀測值的平均 $\overline{X}$ 時，迴歸線之信賴帶較寬。

$$\boxed{\hat{Y}_h = b_0 + b_1 X_h} \qquad \boxed{s^2\{\hat{Y}_h\} = MSE\left[\frac{1}{n} + \frac{(X_h - \overline{X})^2}{\sum (X_i - \overline{X})^2}\right]}$$

我們想藉著計算迴歸線的 90% 信賴帶評估 Toluca 公司的估計迴歸函數能精確到何種程度。我們以 $X_h = 100$ 說明信賴帶邊界值的計算。前面對此例已得

$$\hat{Y}_h = 419.4 \quad s\{\hat{Y}_h\} = 14.27$$

現在需要：

B-10 B.4, F(0.90,2,24)=2.54

$$W^2 = 2F(1-\alpha; 2, n-2) = 2F(.90; 2, 23) = 2(2.549) = 5.098$$

$$W = 2.258$$

故此例之迴歸線信賴帶在 $X_h = 100$ 處的邊界值為 $419.4 \pm 2.258\ (14.27)$，即信賴帶為：

$$387.2 \le \beta_0 + \beta_1 X_h \le 451.6 \quad X_h = 100$$

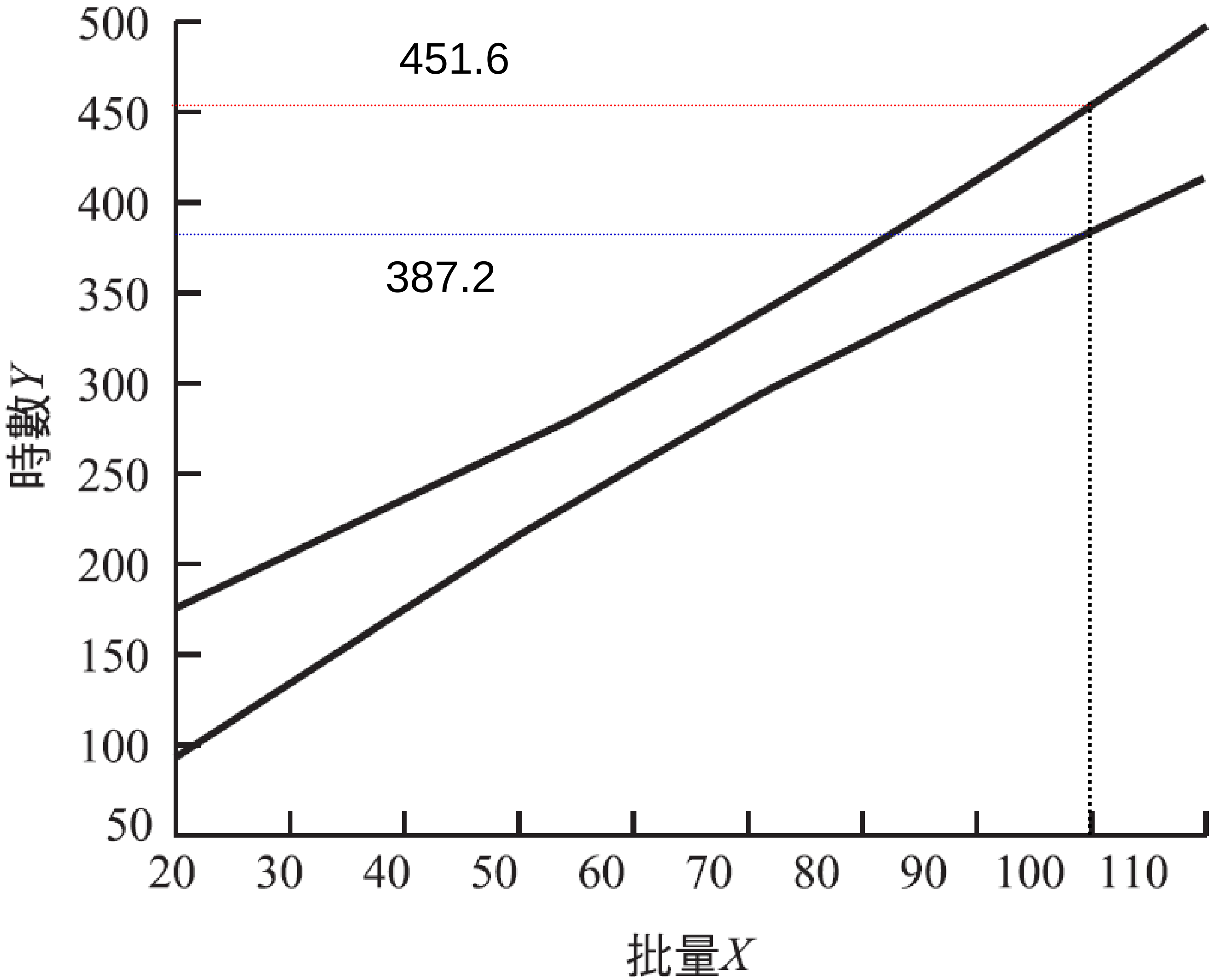
循類似方式，對每個 X_h，由(2.28)及(2.30)得到 $\hat{Y}_h$ 及 $s\{\hat{Y}_h\}$，即可由(2.40)的方法獲得信賴帶在 X_h 的邊界值。圖 2.6 是此例迴歸線的一個信賴帶的圖；當時，圖中顯示的邊界值為 387.2 與 451.6，如先前所計算的。

由圖 2.6 可看出：Toluca 公司之例的迴歸線估計得相當精確。

圖中顯示迴歸線信賴帶

$$387.2 \le \beta_0 + \beta_1 X_h \le 451.6 \text{，} \quad X_h = 100$$

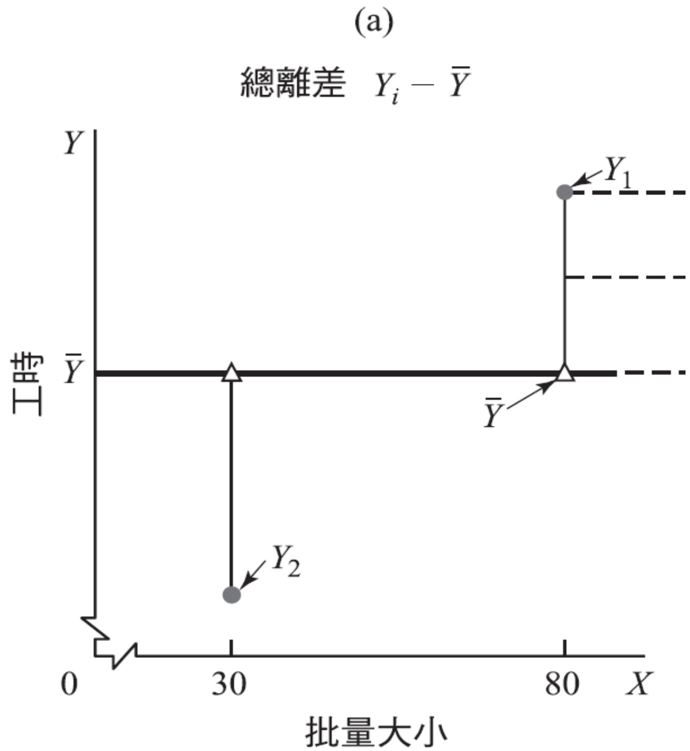
圖 2.6
迴歸線的信賴帶
Toluca 公司案例



2.7 迴歸分析中的變異數分析法

（Analysis of Variance Approach to Regression Analysis ）

- 現在要以變異數分析的觀點來考慮迴歸分析。
- 總平方和的分割



- 基本概念：變異數分析法是建立在於反應變數Y的平方和以及自由度的分割。
- 圖2.7a 顯示表1.1前兩 批生產的Y_i 觀測值。

•在工作時數 Y_i 之間具有變異，無論批量大小為何，這些變異習慣上是以 Y_i 對其平均數 $\bar{Y}$ 的離差來衡量。

$$Y_i - \bar{Y} \tag{2.42}$$

- 圖2.7a中此項離差是以垂直線段表示。總變異是(2.42)離差平方的和，以*SSTO*表示：

$$SSTO = \sum (Y_i - \bar{Y})^2 \tag{2.43}$$

其中 *SSTO* 是**總平方和** (total sun squares)。

- 若所有觀測值 都一樣，則 $SSTO = 0$；Y_i 之間的變異愈大，則 *SSTO* 愈大。所以，*SSTO* 代表的是在不考慮批量大小 X 因素時，關於生產一批零件所需工作時數Y的變異數的一項不確定性量數

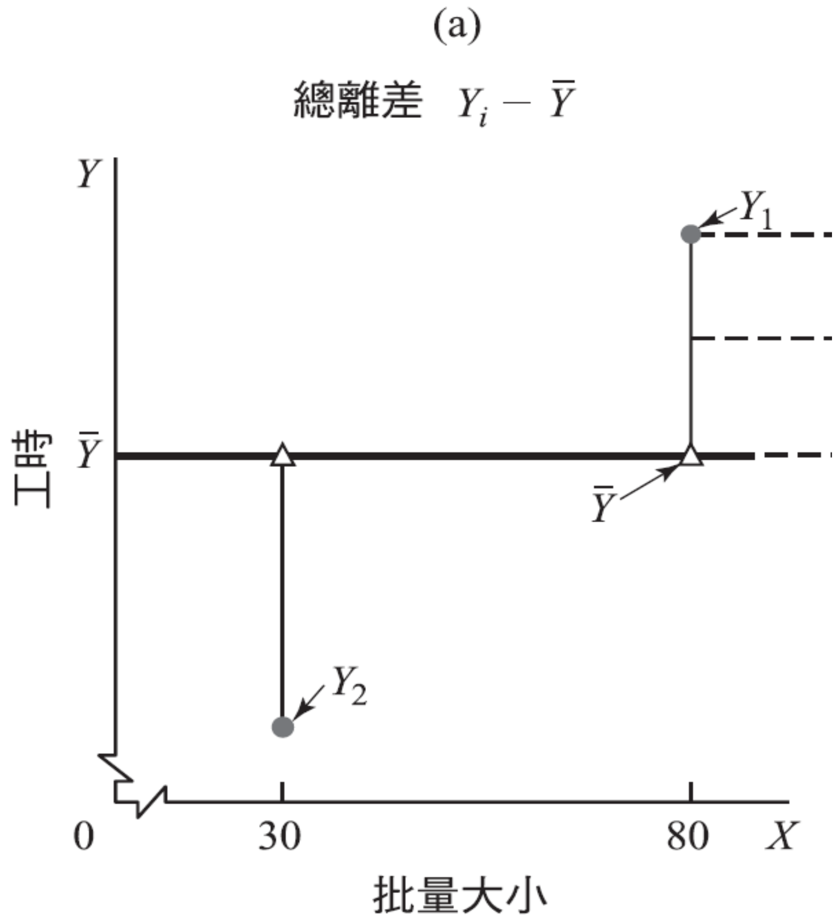
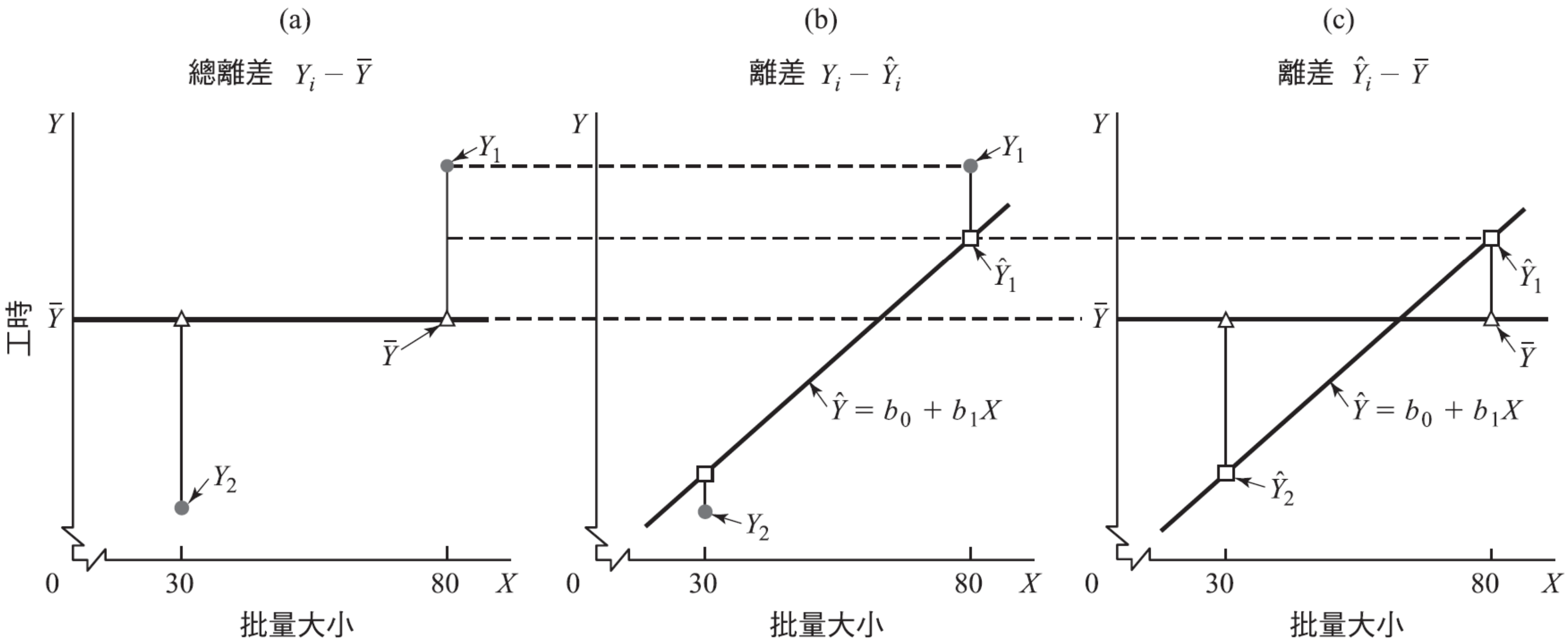


圖 2.7

總離差 $Y_i - \bar{Y}$ 之分割圖示— Toluca 公司案例（未按比例繪製；僅顯示 Y_1 及 Y_2 兩觀測值）。



- 若考慮預測變數 X，則反映 Y 之不確定性的變異是 Y_i 和配適的迴歸線 $\hat{Y}_h$ 之間的差： $$Y_i - \hat{Y}_h \tag{2.44}$$
- 這些離差在圖2.7b 中也以垂直線段顯示。Y_i 觀測值之變異，在考慮預測變數 X 的效果後，是以 (2.44) 離差平方的和來衡量，即(1.21)的 ***SSE***： $$SSE = \Sigma(Y_i - \hat{Y}_h)^2 \tag{2.45}$$

- $SSE = \Sigma (Y_i - \hat{Y}_h)^2$ 而 *SSE* 是**誤差平方和** (error sum of squares)。若所有 Y_i 都落在配適的迴歸線上，則 SSE = 0；而 Y_i 對配適的迴歸線之變異愈大，SSE 也愈大。
- 在 Toluca 公司的例子，由前面的結果(表2.1)得知:

  SSTO = 307,203， SSE = 54,825

- 這兩個平方和的顯著差異原因在哪裡？此差異，是另一個 *SSR* 是**迴歸平方和**

$$SSR = \sum \left(\hat{Y}_i - \bar{Y} \right)^2 \qquad (2.46)$$

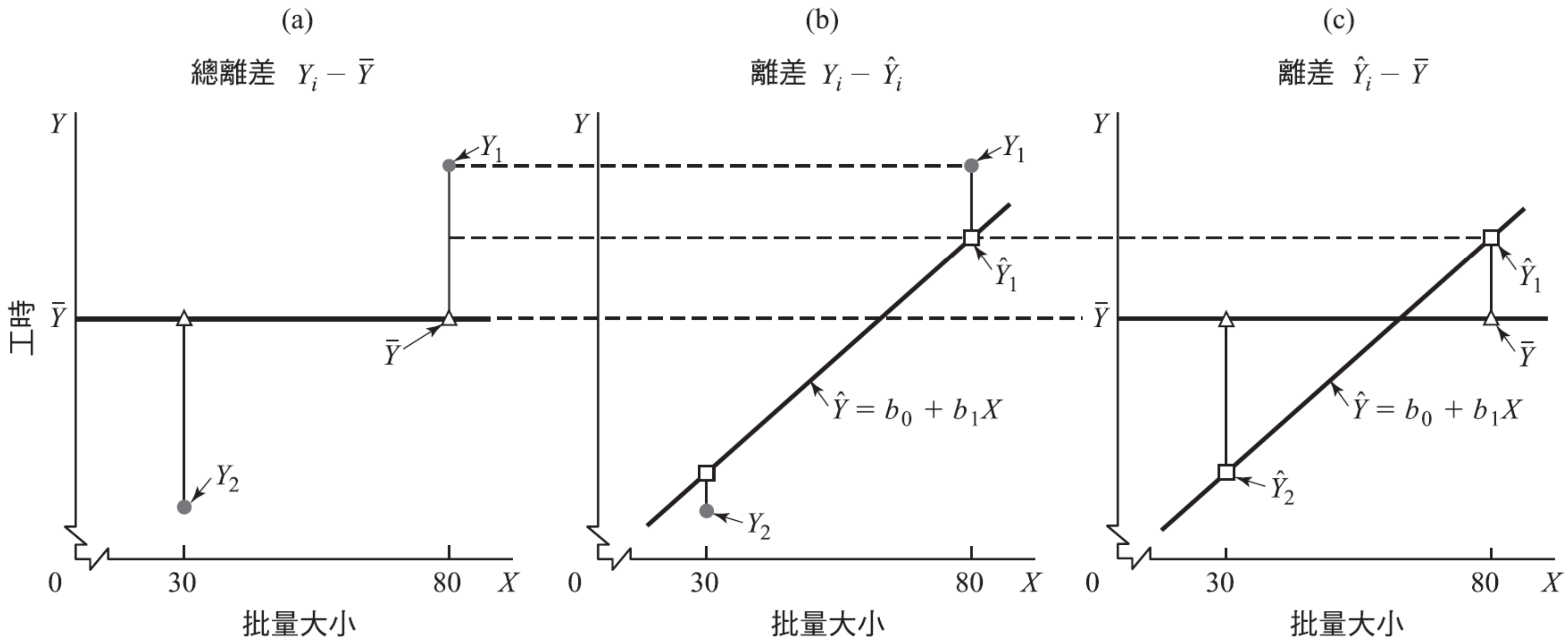
SSR 是**迴歸平方和 (regression sum of squares)** 。注意 SSR 也是一項離差平方和，該離差為 $\hat{Y}_i - \bar{Y}$ (2.47)

- 這些離差在圖 2.7c 以垂直線段表示，每一離差只是迴歸線上的配適值和這些配適值的平均數 $\bar{Y}$ 之差。如果迴歸線是水平的，則 $\hat{Y}_i - \bar{Y}$ =0，故 SSR = 0 ;否則 SSR 是正的。

- SSR 可視為衡量 Y_i 變異中可歸因於迴歸線的部分。SSR相對SSTO愈大，則迴歸關聯對的總變異的效果愈大。
- 在Toluca公司，SSR = SSTO – SSE = 307,203 -54,825=25,2378
此結果表示工作時數的總變異中，有大部分應歸因於批量與工作時數的關聯

圖 2.7

總離差 $Y_i - \bar{Y}$ 之分割圖示—Toluca 公司案例（未按比例繪製；僅顯示 Y_1 及 Y_2 兩觀測值）。



- 分割的正式推導

總離差(total deviation) $Y_i - \bar{Y}$ 可分解成兩個部分：

$$\underbrace{Y_i - \bar{Y}}_{\text{總離差}} = \underbrace{\hat{Y}_i - \bar{Y}}_{\text{迴歸配適值對平均數之離差}} + \underbrace{Y_i - \hat{Y}_i}_{\text{觀測值對配適迴歸線之離差}} \tag{2.48}$$

此兩部分即： 1.配適值$\hat{Y}_h$對平均數 $\bar{Y}$ 之離差。

2.觀測值Y_i對配適迴歸線之離差。

- 將這些離差平方再加總後，仍然保有同樣的關係，

$$\sum\left(Y_i - \bar{Y}\right)^2 = \sum\left(\hat{Y}_i - \bar{Y}\right)^2 + \sum\left(Y_i - \hat{Y}_i\right)^2 \tag{2.49}$$

或者，用(2.43)、(2.45)及(2.46)的符號：

$$\boxed{SSTO = SSR + SSE} \tag{2.50}$$

另有些代數上恆等的替代公式，其中一個適用於推導解析結果的公式如下：

$$\boxed{SSR = b_1^2 \sum\left(X_i - \bar{X}\right)^2} \tag{2.51}$$

自由度劃分

- 對應總平方和SSTO的分類，自由度(degress of freedom)也可以做對應的分割。
- SSTO具有*n*-1個自由度;因$Y_i - \bar{Y}$ 滿足一個總和為零的限制條件，故損失一個自由度。$\boxed{SSTO = \sum \left(Y_i - \bar{Y}\right)^2}$
- SSE具有*n* -2個自由度。失去兩個自由度是因為需要估計 β_0 及 β_1 兩個參數以得到配適值。$\boxed{SSE = \sum \left(Y_i - \hat{Y}_i\right)^2}$
- SSR只是一個自由度。雖然有n個離差項 $\hat{Y}_i - \bar{Y}$ ，每一個$\hat{Y}_i$ 都由同一條估計的迴歸線計算而得。一條迴歸線有兩個自由度，亦即對應此直線的截距和斜率;但因離差 $\hat{Y}_i - \bar{Y}$ 受到總和為零的限制，故又失去一個自由度，(2-1)。$\boxed{SSR = \sum \left(\hat{Y}_i - \bar{Y}\right)^2}$

均方 (mean square, MS)

- 將平方和除以其對應自由度，結果稱為**均方**(MS)。此處有興趣的是 **迴歸均方** (regression mean square, MSR)

$$MSR = \frac{SSR}{1} = SSR \tag{2.52}$$

- 以及 **誤差均方** (error mean square, MSE)，定義如(1.22)：

$$\boxed{MSE = \frac{SSE}{n-2}} \tag{2.53}$$

- 在Toluca公司的例子，SSR=252,378，SSE=54,825，故
  MSR = 252,378/1 = 252,378

  MSE = 54,825/23 = 2,384

- 注意：MSR+MSE不等於[SSTO/(n-1)]=307,203/24=12,800

變異數分析表

(analysis of variance table, ANOVA table)

- 基本表

  劃分總平方和及其對應自由度的結果可以彙總成表2.2的變異數分析表

表 **2.2**
簡單線性迴歸的變異數分析表。

變異來源	SS	df	MS	$E\{MS\}$
迴歸	$SSR = \sum(\hat{Y}_i - \bar{Y})^2$	1	$MSR = \dfrac{SSR}{1}$	$\sigma^2 + \beta_1^2 \sum(X_i - \bar{X})^2$
誤差	$SSE = \sum(Y_i - \hat{Y}_i)^2$	$n - 2$	$MSE = \dfrac{SSE}{n-2}$	σ^2
總合	$SSTO = \sum(Y_i - \bar{Y})^2$	$n - 1$		

- 修訂表

有時候會採用多一個分解項的ANOVA表，因總平方和可分解為

$$SSTO=\sum\left(Y_i-\bar{Y}\right)^2=\sum Y_i^2-n\bar{Y}^2$$

在修訂的ANOVA表中，定義了未修正總平方和 (SSTOU)，如下：

$$SSTOU=\sum Y_i^2 \tag{2.54}$$

還有平均數修正項平方和(SS)，定義為

$$SS(\text{平均數修正項})=n\bar{Y}^2 \tag{2.55}$$

表 2.3

簡單線性迴歸的修訂變異數分析表。

變異來源	SS	df	MS
迴歸	$SSR=\sum(\hat{Y}_i-\bar{Y})^2$	1	$MSR=\frac{SSR}{1}$
誤差	$SSE=\sum(Y_i-\hat{Y}_i)^2$	$n-2$	$MSE=\frac{SSE}{n-2}$
總合	$SSTO=\sum(Y_i-\bar{Y})^2$	$n-1$	
平均數修正項	$SS(\text{平均數修正項})=n\bar{Y}^2$	1	
總合（未修正）	$SSTOU=\sum Y_i^2$	n	

期望均方

- 均方的期望值由統計理論得：

$$\boxed{\begin{aligned} &E\{MSE\} = \sigma^2 \\ &E\{MSR\} = \sigma^2 + \beta_1^2 \sum (X_i - \bar{X})^2 \end{aligned}} \qquad \begin{aligned} &(2.56) \\ &(2.57) \end{aligned}$$

上列(2.56)及(2.57)的期望均方(expected mean squares)也列在變異數分析表(2.2)中。事實上(2.56)的結果 MSE 是 σ^2 的不偏估計量。

- 若 $\beta_1 \neq 0$，則因(2.57)中的 $\boxed{\beta_1^2 \sum (X_i - \bar{X})^2}$ 是正的，所以MSR抽樣分配的平均數大於 σ^2 。因此當 $\beta_1 \neq 0$ 時，所以MSR傾向大於MSE。
- 根據上述結果，顯示MSR及MSE可用來檢定是否 $\beta_1 = 0$。若MSR 和 MSE 大致相似則暗示 $\beta_1 = 0$ 是可接受的；反之，若MSR明顯大於MSE，則表示 $\beta_1 \neq 0$，**這正是底下要討論的變異數分析檢定的基本想法**。

$\beta_1 = 0$ 對 $\beta_1 \neq 0$ 的 F 檢定

變異數分析的方法提供迴歸模型（及其他線性統計模型）一套極有用的檢定工具。以此處考慮的簡單線性迴歸來說，變異數分析可做下列檢定：

$$H_0 : \beta_1 = 0 \qquad (2.59)$$
$$H_a : \beta_1 \neq 0$$

- 檢定統計量

變異數分析的檢定統計量以 F^* 表示。此統計量以下列方式比較 MSR 和 MSE：

$$F^* = \frac{MSR}{MSE} \qquad (2.60)$$

- 先前由表(2.2)之期望均方得到的動機暗示較大的 F^* 值，支持 H_a；而 F^* 值接近 1，則支持 H_0。換句話說，適當的檢定是**右尾檢定**。

- **F*的抽樣分配**

為了建構一個統計決策規則並檢查其性質，需要知道*F**的抽樣分配。首先考慮 $H_0\ (\beta_1 = 0)$成立時*F**的抽樣分配；Cochran定理與此有關。此定理可寫成

*若所有 n 個觀測值Y_i均來自同一個常態分配，其平均數為μ，變異數為σ^2，並且將 SSTO 分*解為 k個平方和 SSR，各具自由度 df_r，又若下列條件滿足：

$$\sum_{r=1}^{k} df_r = n-1 \tag{2.61}$$

則各 SSR/σ^2 為相互獨立各具自由度 df_r 的 χ^2 隨機變數。

- 在表 2.2 將 SSTO 分解成 SSR 及 SSE 兩個平方和，而它們的自由度也是可加的。因此 *若* $\beta_1=0$，*故所有 Y_i 具有相同平均 $\mu=\beta_0$ 數即變異數 σ^2，則 SSE/σ^2 及 SSR/σ^2 為相互獨立 χ^2隨機變數。*

- **檢定統計量 F***

$$F^* = [\ (SSR/\sigma^2)/1\ ]\ /\ [\ (SSE/\ \sigma^2)/(n-2)\ ] = MSR\ /\ MSE$$

當 H_0 成立時，F^*服從F分配；或更明確地為 F(1,n-2) 分配。

當 H_1 成立時，F^*服從非中心F分配；它是一個複雜的分配。

- **建構決策規則**

由於檢定規則應取右尾，並且當 H_0 成立時，F^* 服從 $F(1, n-2)$，因此若型一錯誤的風險控制 α ，則決策為

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{若 } F^* \le F(1-\alpha;1,n-2), \text{則結論為 } H_0 \\ \text{若 } F^* > F(1-\alpha;1,n-2), \text{則結論為 } H_a \end{array}} \tag{2. 62}$$

其中$F(\ 1-\alpha;1,n-2)$為對應之 F 分配的 $(1-\alpha)100$ 百分位數

我們將重複 Toluca 公司例子中對 β_1 檢定，但改用 F 檢定。待檢定的假說是

$$H_0: \beta_1 = 0$$
$$H_a: \beta_1 \neq 0$$

B-14, B.4, F(0.95,1,24)=4.26

如同前面做的，令 $\alpha = .05$。因 $n = 25$，我們需要 $F(.95; 1, 23) = 4.28$。決策規則為

$$\text{若 } F^* \leq 4.28\text{，則結論為 } H_0$$
$$\text{若 } F^* > 4.28\text{，則結論為 } H_a$$

由早先的結果得 $MSR = 252{,}378$ 及 $MSE = 2{,}384$，故 F^* 為

$$F^* = \frac{252{,}378}{2{,}384} = 105.9$$

因為 $F^* = 105.9 > 4.28$，結論為 H_a，即 $\beta_1 \neq 0$，即工作時數和批量之間存在線性關聯。這和前面用 t 檢定得到的結果相同；如以下之討論，這是必然的。

圖 2.2 的 MINITAB 輸出報表中，F^* 的值在標識為 "F" 那一欄。在此之後為其 P- 值，$P\{F(1, 23) > 105.9\}$，即 0+，表示此資料和 $\beta_1 = 0$ 無法配合。

圖 2.2

MINITAB 迴歸輸出的部分— Toluca 公司案例。

```
The regression equation is
Y = 62.4 + 3.57 X

Predictor        Coef       Stdev     t-ratio       p
Constant        62.37       26.18       2.38    0.026
X              3.5702      0.3470      10.29    0.000

s = 48.82       R-sq = 82.2%      R-sq(adj) = 81.4%

Analysis of Variance

SOURCE          DF        SS          MS         F          p
Regressio        1    252378      252378    105.88      0.000
Error           23     54825        2384
Total           24    307203
```

- *F* 檢定和 *t* 檢定的等價性

給定一 α 水準，對 $\beta_1 = 0$ 與 $\beta_1 \neq 0$ 的 *F* 檢定，代數上等價於雙尾的 *t* 檢定。由(2.51)可知 $SSR = b_1^2 \sum (X_i - \bar{X})^2$

因此， $$F^* = \frac{SSR \div 1}{SSE \div (n-2)} = \frac{b_1^2 \sum (X_i - \bar{X})^2}{MSE}$$

- 但因 $s^2\{b_1\} = MSE / \Sigma(X_i - X)^2$，故得：

$$F^* = \frac{b_1^2}{s^2\{b_1\}} = \left(\frac{b_1}{s\{b_1\}} \right)^2 = (t^*)^2 \qquad (2.63)$$

- 在剛計算過Toluca 公司例子中，得 F* = 105.9，而先前的結果得到 t* = 10.29，可知 $(10.29)^2 = 105.9$
- 在做 β_1 檢定時，對應的臨界值$[t(0.975; 23)]^2 = (2.069)^2 = 4.28 = F(0.95; 1,23)$，注意 t 檢定是雙尾，而 F 檢定是單尾。

2.8 一般線性檢定法 (General Linear Test Approach)

- 以變異數分析法對 $\beta_1=0$ 與 $\beta_1\neq0$ 的檢定，只是**線性統計模型一般檢定**的一個特例。
- 一般線性檢定方法包括三個基本步驟。

1. 全模型(full model)

由被認為適合當前資料的模型著手，此模型稱為**全模型**或**無限制模型**。在簡單線性迴歸，全模型就是常態誤差迴歸模型 (2.1)：

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + \varepsilon_i \quad \text{全模型} \tag{2.64}$$

以最小平方法或是最大概似法配適上述全模型，得誤差平方和 即觀測值 Y_i 對估計之期望值 $\hat{Y}_i$ $(=b_0+b_1X_i)$的離差平方和，結果記做 ***SSE(F)***，表示是全模型的誤差平方和 ($df_F = n$-2) 。

在此得

$$\boxed{SSE(F) = \sum\left[Y_i - (b_0 + b_1 X_i)\right]^2 = \sum\left(\hat{Y}_i - Y_i\right)^2 = SSE} \tag{2.65}$$

2. 縮減模型(reduced model)

其次考慮H_0，在這裡我們有

$$H_0: \beta_1 = 0$$
$$H_a: \beta_1 \neq 0 \qquad (2.66)$$

當 H_0 成立時的模型就稱為縮減模型或限制模型。當 $\beta_1 = 0$ 時，(2.64)縮減為

$$Y_i = \beta_0 + \varepsilon_i \quad \text{縮減模型} \qquad (2.67)$$

- 同樣地，以最小平方法或最大概似法配適此縮減模型，得其誤差平方和，結果記做 ***SSE*（R）**。
- β_0 的最小平方或最大概似估計量均為 $\bar{Y}$。因此，每一觀測值對應的估計期望值 $b_0 = \bar{Y}$，而此縮減模型的誤差平方和 ($df_R = n$-1) 為

$$\boxed{SSE(R) = \sum(Y_i - b_0)^2 = \sum(Y_i - \bar{Y})^2 = SSTO} \qquad (2.68)$$

$$SSE(F)=\sum\left[Y_i-(b_0+b_1X_i)\right]^2=\sum\left(\hat{Y}_i-Y_i\right)^2=SSE$$

3. 檢定統計量

$$SSE(R)=\sum(Y_i-b_0)^2=\sum\left(Y_i-\bar{Y}\right)^2=SSTO$$

- 比較兩個模型的誤差平方和$SSE(F)$及$SSE(R)$。可證明$SSE(F)$恆不大於$SSE(R)$：

$$SSE(F)\leq SSE(R) \tag{2.69}$$

其原因是模型中包含愈多參數，則可配適得更好，因此觀測值與配適的迴歸函數間的離差當然就愈小。

- 若SSE(F)接近SSE(R)，觀測值對配適的迴歸函數之間的離差在全模型和縮減模型差不多，則全模型增加的參數對縮減觀測值和估計的迴歸函數之間的Y_i變異沒有幫助。因此，SSE(R)－SSE(F)的值小，表示 H_0 應是成立的;反過來說，兩誤差平方和差距大，暗示 H_a 成立。

$$\boxed{\begin{aligned}&H_0:\beta_1=0\\&H_a:\beta_1\neq 0\end{aligned}}$$

- 真正的檢定統計量是$SSE(R)-SSE(F)$的函數，即

$$\boxed{F^*=\frac{SSE(R)-SSE(F)}{df_R-df_F}\div\frac{SSE(F)}{df_F}} \tag{2.70}$$

當H_0成立時，上述統計量具有F分配。自由度df_R及df_F分別對應到縮減模型及全模型的誤差平方和。大的F^*值導致H_a成立的結論，因大的差異$SSE(R)-SSE(F)$暗示H_a成立。

- 所以決策規則為：

$$\begin{aligned}&\text{若 } F^* \le F(1-\alpha; df_R - df_F, df_F)\text{，則結論為 } H_0\\&\text{若 } F^* > F(1-\alpha; df_R - df_F, df_F)\text{，則結論為 } H_a\end{aligned} \tag{2.71}$$

- 對於檢定是否$\beta_1 = 0$，得到：

SSE(R) = SSTO，$df_R = n\text{-}1$; SSE (F) = SSE ，$df_F = n\text{-}2$

代入(2.70)得 F* = (MSE/MSE) ，結果和（2.60）變異數分析的檢定統計量**完全相同**，如同變異數分析。

- 摘要

$$F^* = \frac{SSE(R)-SSE(F)}{df_R - df_F} \div \frac{SSE(F)}{df_F}$$

其基本步驟摘要如下：

1. 配適全模型，計算其誤差平方和SSE(F) 。
2. 假設配適縮減模型，並計算其誤差平方和SSE(R) 。
3. 採用(2.70)的檢定統計量及(2.71)的決策問題。

2.9 迴歸模型中 *X* 和 *Y* 之關聯的描述性量數

Descriptive Measures of Linear Assoctiation between X and Y

判定係數

$\boxed{SSTO=\sum\left(Y_i-\bar{Y}\right)^2}$ $\boxed{SSE=\sum\left(Y_i-\hat{Y}_i\right)^2}$

- SSTO用來衡量不考慮預測變數X時，觀測值Y_i的變異，也可以說是預測Y時的不確定性。因此，SSTO是測量不考慮X而預測Y時的不確定性。類似地，SSE是測量預測變數X用於迴歸模型時Y_i的變異。
- 一個衡量X對減低Y變異的效果，或說降低預測Y的不確定性的自然量數，是把縮減的變異量($SSTO-SSE=SSR$)表示為總變異的比率：

$$\boxed{R^2=\frac{SSR}{SSTO}=1-\frac{SSE}{SSTO}} \tag{2.72}$$

量數 R^2 稱為**判定係數** (coefficient of determination)。因$0\leq SSE\leq SSTO$，故

$$\boxed{0\leq R^2\leq 1} \tag{2.72a}$$

- 可將 R^2 解釋為「使用變數X削減總變異的比值」。因此，R^2 愈大表示愈多Y的總變異因使用而削減。R^2 界限值在下列情形可以達到：

1. 當所有觀測直落在配適的迴歸線上時，SSE＝0，故 R^2＝1;這種情形如 圖2.8a 。此時預測變數X解釋了所有 Y_i 的變異。
2. 當配適的迴歸線是水平線時，$b_1 = 0$ 且 $\hat{Y}_i = \bar{Y}$ ，故SSE＝SSTO 且 $R^2 = 0$。這種情形如 圖2.8b 所示。此時樣本資料X和Y之間沒有線性關聯。

$$\boxed{R^2 = \frac{SSR}{SSTO} = 1 - \frac{SSE}{SSTO}}$$

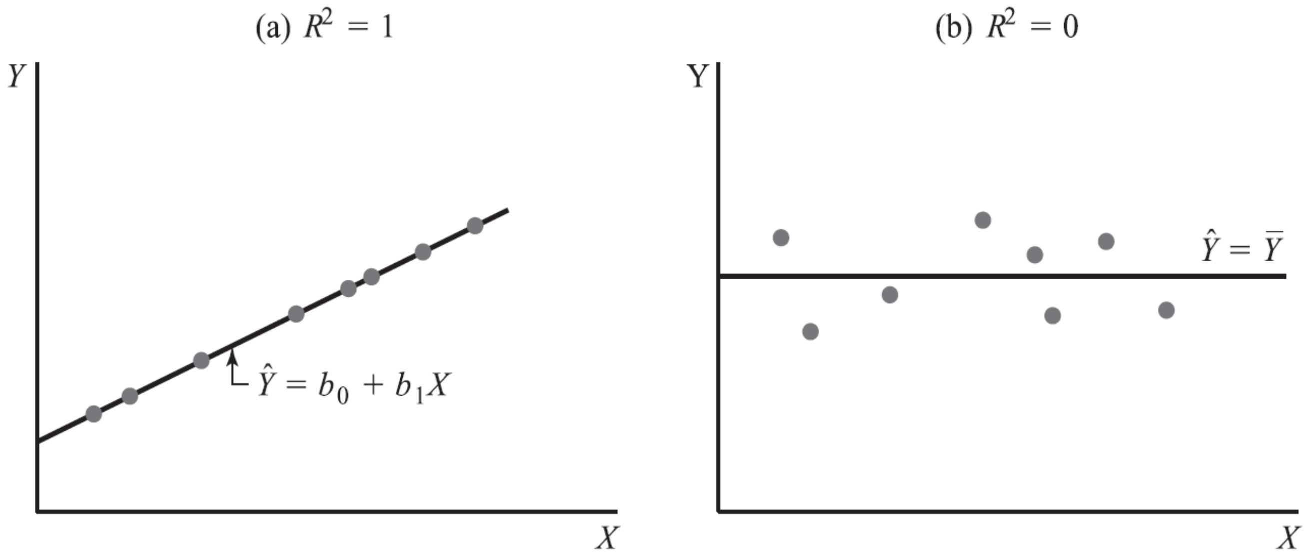


圖 2.8
$R^2 = 1$ 及 $R^2 = 0$ 時的散佈圖。

在 Toluca 公司的例子，$SSTO = 307{,}203$ 而 $SSR = 252{,}378$，故

$$R^2 = \frac{252{,}378}{307{,}203} = .822$$

所以考慮批量大小之後，工作時數的變異削減了 82.2%。

圖 2.2 的 MINITAB 輸出以 "R-sq" 標示判定係數 R^2，並且用百分比表示。輸出中另有 "R-sq(adj)" 一項，將留待第 6 章再說明。

```
The regression equation is
Y = 62.4 + 3.57 X

Predictor       Coef       Stdev     t-ratio        p
Constant       62.37       26.18        2.38    0.026
X             3.5702      0.3470       10.29    0.000

s = 48.82       R-sq = 82.2%       R-sq(adj) = 81.4%

Analysis of Variance

SOURCE         DF          SS          MS        F         p
Regressio       1      252378      252378   105.88     0.000
Error          23       54825        2384
Total          24      307203
```

$$R^2 = \frac{SSR}{SSTO} = 1 - \frac{SSE}{SSTO}$$

係數 R^2 的限制

- 儘管判定係數和相關係數被廣泛地使用;不幸也常遭嚴重誤解。這裡考慮三個普遍的誤解：

- 誤解 1：高相關係數表示可得到有用的預測。這不見得正確

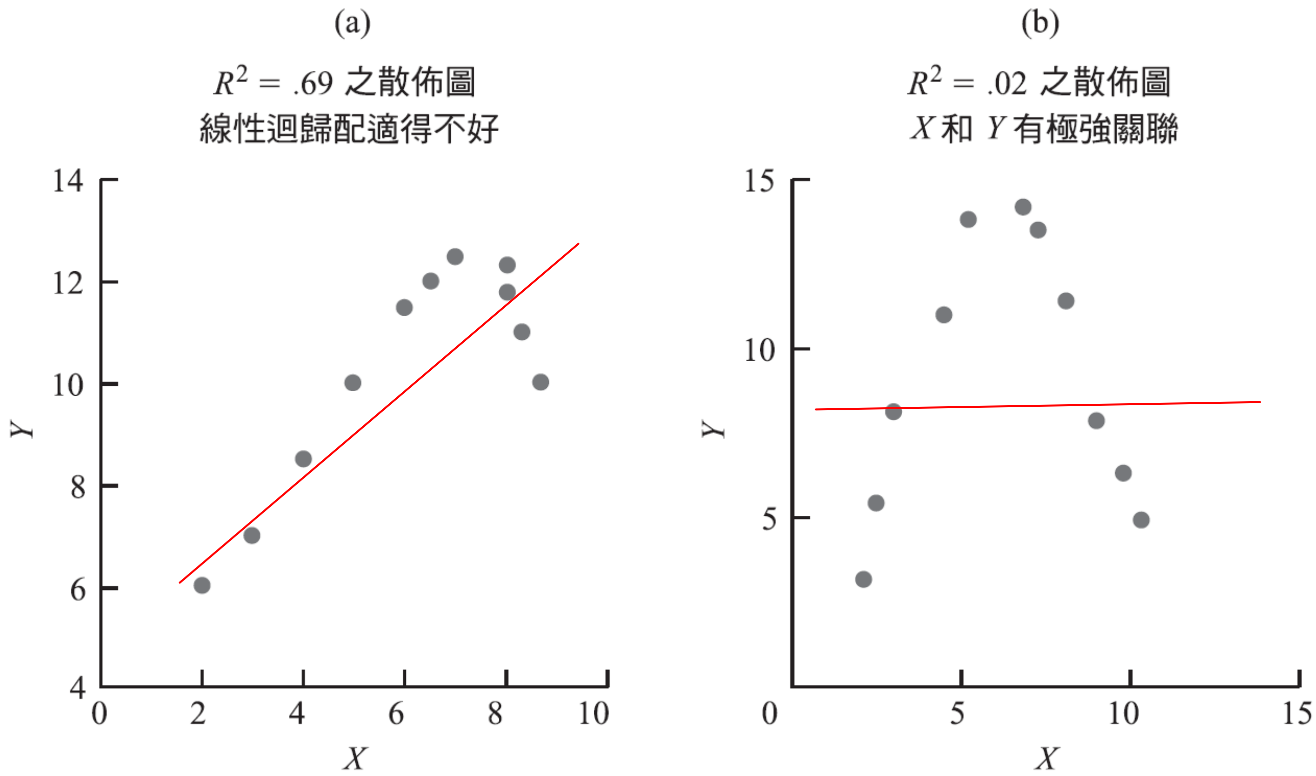


圖 2.9
圖示兩種關於判斷係數的誤解。

- 誤解 2：高相關係數表示估計迴歸線配適良好。這仍然不一定對(圖2.9a) 。

- 誤解 3：判斷係數接近零表示X和Y沒有關聯。這仍然是不一定(圖2.9b)。

相關係數 r (coefficient of correlation)

- 當Y與X為隨機時，一種Y與X間的線性關聯量測稱為相關係數。其為取R^2的平方根： $\boxed{r = \pm\sqrt{R^2}}$ (2.73)

其中正負和配適的迴歸線斜率的正負一致。因此，r 的範圍為 $-1 \le r \le 1$。

在 Toluca 公司的例子中，我們得到 $R^2 = .822$，將 X 視為隨機變數，則其相關係數為

$$\boxed{SSE = \sum\left(Y_i - \hat{Y}_i\right)^2}$$

$$r = +\sqrt{.822} = .907$$

這裡取正根是因為 b_1 為正的。

$$\boxed{SSTO = \sum\left(Y_i - \bar{Y}\right)^2}$$

$$\boxed{R^2 = \frac{SSR}{SSTO} = 1 - \frac{SSE}{SSTO}}$$

說明

1. 一給定樣本的 R^2 值會受到 X 觀測值間距的影響，這可由(2.72)看出。SSE 並不會受 X_i 間距系統化的影響，因為在迴歸模型(2.1)，於 X 的每一水準均得$\sigma^2\{Y_i\} = \sigma^2$。然而，當 $b_1 \neq 0$ 時，X_i 的間距愈寬，則 Y_i 對 $\bar{Y}$ 的分散程度也愈大，所以$SSTO$也隨著愈大。因此，X_i愈分散，則 R^2 愈高。

2. 迴歸平方和 SSR 常稱為 Y 的「**已解釋變異**」(*explained variation*)，而殘差平方和 SSE 稱為「**未解釋變異**」(*unexplained variation*)。所以係數 R^2 可表示 Y 的總變異($SSTO$)中已被 X「解釋」的比率。不幸，這名詞常被按字面解釋，因而誤解其本意。要記得在迴歸模型，並未隱含 X 對 Y 的關係是因果的、或解釋的意義。

3. 迴歸模型中並無任何參數要用 R^2 或 r 來估計。這些係數只是在所觀測樣本中 X 和 Y 間之線性關聯的一種描述性量數。在任一情況，這些係數可能有用，也可能沒有用。 ■

2.10 應用迴歸分析的考慮事項

- 迴歸分析的主要用途—對迴歸參數做推論，估計某一X值對應的平均反應，以及給定一X職時預測新的Y觀測值。但仍有些在應用迴歸分析時的注意事項須在此說明：

1.迴歸分析常被用來對未來情形做推論

2.在預測Y的新觀測值時，預測變數X本身也常需要預測。

3.另一個關於推論的警告是預測變數的水準落在觀測值範圍之外。不幸的是，這種情況實務上經常發生。

4.計檢定得到$\beta_1 \neq 0$並不代表預測與反應變數間具有因果關係。在控制實驗中，存在迴歸關聯常是具有因果關係的有效證據

5.同時估計平均反應時的信賴界限（2.33）及預測新觀測值的預測界限（2.36），其信賴細數都只適用給定樣本的單一X水準。