



統計學實習課

估計與檢定

2026/6/29 & 6/30

TA：張嵩文

講義大綱

1. 統計推論
2. 點估計
3. 區間估計
4. 假設檢定

統計推論

母體 Population

- 參數 (μ, σ^2, p)
- 通常未知

樣本 Sample

- 統計量 (\bar{x}, s^2, \hat{p})
- 我們能計算

結論 Inference

- 估計 + 檢定
- 具不確定性

估計 Estimation

- 用樣本統計量「猜」母體參數的數值
(點估計 / 區間估計)

檢定 Hypothesis Testing

- 用樣本資料判斷對母體的某個主張是否成立

點估計

定義：用單一數值估計未知母體參數；這個計算規則稱為「估計量 (Estimator)」，代入特定樣本後得到的數字稱為「估計值 (Estimate)」。

常用點估計量：

母體參數	點估計量	符號
平均數 μ	樣本平均數	\bar{x}
比例 p	樣本比例	\hat{p}
變異數 σ^2	樣本變異數	s^2

作業一 4(a)(b)

用 Obesity 資料集計算 BMI 樣本平均數 \bar{x} → 這就是母體平均 BMI 的點估計值；也要計算樣本標準差 s 。

Excel

- 平均：=AVERAGE()
- 樣本變異數：=VAR.S()
- 樣本標準差：=STDEV.S()

信賴區間的概念

為什麼需要區間？

- 點估計是單一數字，但「一定正確」的機率是 0。區間估計承認不確定性：我們說的是「有多大把握， μ 落在這個範圍裡？」

通用公式

$$\bar{x} \pm (\text{臨界值}) \times \frac{s}{\sqrt{n}}$$

常見誤解

- 錯：「 μ 有 95% 的機率在這個區間」
 - 對：「用同樣方法重複抽樣 100 次，約 95 個算出的區間會包含 μ 」
- μ 是固定常數，區間才是隨機的！

信心水準的選擇

實務最常用 95% ($\alpha = 0.05$) ；
學術研究有時用 99% ($\alpha = 0.01$) ；
信心水準愈高，區間愈寬。

信賴區間的建構 (μ)

- ① 計算樣本統計量 \rightarrow 求出 \bar{x}, s, n
- ② 計算標準誤 Standard Error, $SE = s/\sqrt{n}$
- ③ 查臨界值 95% CI $\rightarrow z_{0.025}$ (σ 已知) or $t_{0.025, n-1}$ (σ 未知)
- ④ 計算邊際誤差 $ME = \text{臨界值} \times SE$
- ⑤ 建構信賴區間 $CI = (\bar{x} - ME, \bar{x} + ME)$

信賴區間 (z 分配 vs t 分配)

z 分配 (標準常態)

- 母體標準差 σ 已知
- 或 n 很大 ($n \geq 30$) , σ 已知
- 比例 p 的信賴區間

$$z_{0.05/2} = z_{0.025} = 1.96 \text{ (95\%)}$$

Excel : =NORM.S.INV(0.975)

注意 : 需輸入 $1-0.025$

t 分配 (Student's t)

- 母體標準差 σ 未知 (常見)
- 自由度 $df = n - 1$
- 小樣本更重要 ; n 大時 $t \approx z$

$$t_{0.025, n-1} \text{ (查表或 excel)}$$

Excel : =T.INV.2T(0.05, n-1)

假設檢定的概念

什麼是假設檢定？

- 用樣本資料判斷對**母體**的某項主張是否有足夠的統計證據支持。
- 核心邏輯：「先假設主張**不成立**，看看資料有多不尋常。」

法庭比喻

- H_0 虛無假設：被告無罪（無罪推定原則）
- H_a 對立假設：被告有罪（需要強力證據）
- 「拒絕 H_0 」= 有足夠證據定罪；
「不拒絕 H_0 」= 無罪釋放（但不是「確定無罪」）

假設檢定的概念

p-value 直覺解釋

$p\text{-value} = P(\text{觀察到這麼極端的結果} \mid H_0 \text{ 成立})$

- p-value 很小 ($< \alpha$) \rightarrow 觀察到的結果很罕見 \rightarrow 拒絕 H_0
- p-value 不小 ($\geq \alpha$) \rightarrow 資料與 H_0 相容 \rightarrow 不拒絕 H_0
- 通常 $\alpha = 0.05$ (5% 顯著水準)

H_0 與 H_a 的設立

三種檢定方向

類型	H_0	H_a
左尾	$\mu \geq \mu_0$	$\mu < \mu_0$
右尾	$\mu \leq \mu_0$	$\mu > \mu_0$
雙尾	$\mu = \mu_0$	$\mu \neq \mu_0$

設立原則

- H_0 通常含「等號」(= 、 \leq 、 \geq)
- H_a 是我們想證明的主張
- 研究者的聲明放在 H_a 而非 H_0

範例：製造商聲稱新引擎

「新引擎平均超過 20 公里/公升」

$H_0 : \mu \leq 20$ (保守、懷疑態度)

$H_a : \mu > 20$ (製造商的主張) \rightarrow 右尾檢定

決策規則

p-value $< \alpha$ (0.05) \rightarrow 拒絕 H_0 ，支持 H_a

p-value $\geq \alpha \rightarrow$ 不拒絕 H_0 ，資料不足以支持 H_a

Excel 函數對照表

描述統計

樣本平均數 \bar{x}	=AVERAGE()
樣本標準差 s (除 $n - 1$)	=STDEV.S()
中位數	=MEDIAN()
\sqrt{n} (計算標準誤用)	=SQRT()

推論統計

t 臨界值 (雙尾)	=T.INV.2T(α , df)
z 臨界值 (雙尾)	=NORM.S.INV($1 - \alpha/2$)
信賴區間邊際誤差 (t)	=CONFIDENCE.T(α , s , n)
信賴區間邊際誤差 (z)	=CONFIDENCE.NORM(α , σ , n)
t 分配右尾 p-value	=T.DIST.RT(t , df)
z 分配右尾 p-value	=1 - NORM.S.DIST(z , TRUE)

作業題目(2)

	A	B	C	D
1	Major (科系)	Employment Rate (%) (就業率)	Average Starting Salary (US\$) (起薪)	Average GPA (平均 GPA)
2	Accounting	95	52000	3.18
3	Business	91	50000	3.11
4	Computer Science	97	76000	3.39
5	Economics	92	61000	3.32
6	Electrical Engineering	96	79000	3.44
...
19	Political Science	86	46000	3.19
20	Sociology	85	44000	3.17
21	Communication	88	47000	3.14

作業題目(2)

作業一 1(a)

計算 mean, median, and standard deviation of starting salary.

Excel

- 平均：`=AVERAGE(C2:C21)`
- 中位數：`=MEDIAN(C2:C21)`
- 標準差：`=ST.DEV(C2:C21)`

作業一 1(b)(c)(d)

參閱投影片 p14~p17

作業一 1(e)

計算 the correlation coefficient between GPA and starting salary.

Excel

- 相關係數：`=CORREL(D2:D21,C2:C21)`

作業題目(3)

作業一 3(a)

已知： $n = 90, p = 0.68$

Find the probability that exactly 65 customers are satisfied. 計算 $P(X = 65)$ 。

Excel


- `=BINOM.DIST(65,90,0.68,FALSE)`

作業一 3(b)

Find the probability that at least 70 customers are satisfied. 計算 $P(X \geq 70)$ 。

$$P(X \geq 70) = 1 - P(X \leq 69)$$

Excel

- `=1-BINOM.DIST(69,90,0.68,TRUE)`  TRUE 表示累積機率

作業題目(3)

作業一 3(c)

Compute the mean and standard deviation.

$$\mu = np, \quad \sigma = \sqrt{np(1-p)}$$

Excel

- $\mu = 90 * 0.68, \sigma = \text{sqrt}(90 * 0.68 * (1 - 0.68))$
- $\mu = 61.2, \sigma = 4.425$

作業一 3(d)

Use the normal approximation to estimate

$$P(52 \leq X \leq 72)$$

作業一 3(d)

① continuity correction

$$P(52 \leq X \leq 72) = P(52.5 < X < 72.5)$$

② 上限： =NORM.DIST(72.5,61.2,4.425,TRUE)

下限： =NORM.DIST(52.5,61.2,4.425,TRUE)

③ 答案： 上限 - 下限 = 0.9700

Excel

- =NORM.DIST(72.5,61.2,4.425,TRUE) - NORM.DIST(52.5,61.2,4.425,TRUE)



B1 : fx Employment Rate (%)

	A	B	C	D
	Major (科系)	Employment Rate (%) (就業率)	Average Starting Salary (US\$) (起薪)	Average GPA (平均 GPA)
1				
2	Accounting	95	52000	3.18
3	Business	91	50000	3.11
4	Computer Science	97	76000	3.39
5	Economics	92	61000	3.32
6	Electrical Engineering	96	79000	3.44
7	Finance	93	61000	3.24
8	Information Systems	94	64000	3.29
9	Management	90	49000	3.08
10	Marketing	89	48000	3.15
11	Mathematics	95	67000	3.47
12	Mechanical Engineering	95	74000	3.41
13	Physics	94	70000	3.53
14	Psychology	87	45000	3.26
15	Statistics	96	71000	3.49
16	Biology	88	47000	3.22
17	Chemistry	90	56000	3.31
18	Civil Engineering	93	69000	3.36
19	Political Science	86	46000	3.19
20	Sociology	85	44000	3.17
21	Communication	88	47000	3.14

① 選取資料

插入圖表

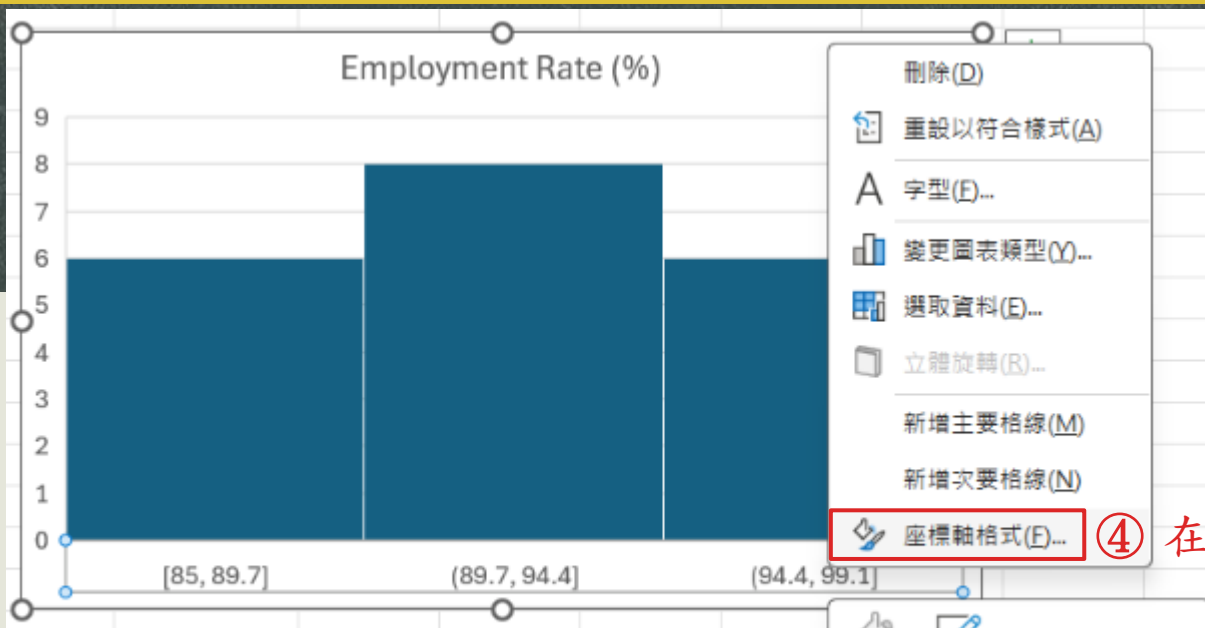
建議的圖表 [所有圖表]

- 最近
- 範本
- 直條圖
- 折線圖
- 圓形圖
- 橫條圖
- 區域圖
- XY 散佈圖
- 地圖
- 股票圖
- 曲面圖
- 雷達圖
- 矩形式樹狀結構圖
- 放射環狀圖
- 表條圖**
- 盒線圖
- 瀑布圖
- 漏斗圖
- 組合圖

長條圖

確定 取消

③



④ 在 x 軸點右鍵

座標軸格式

座標軸選項 | 文字選項

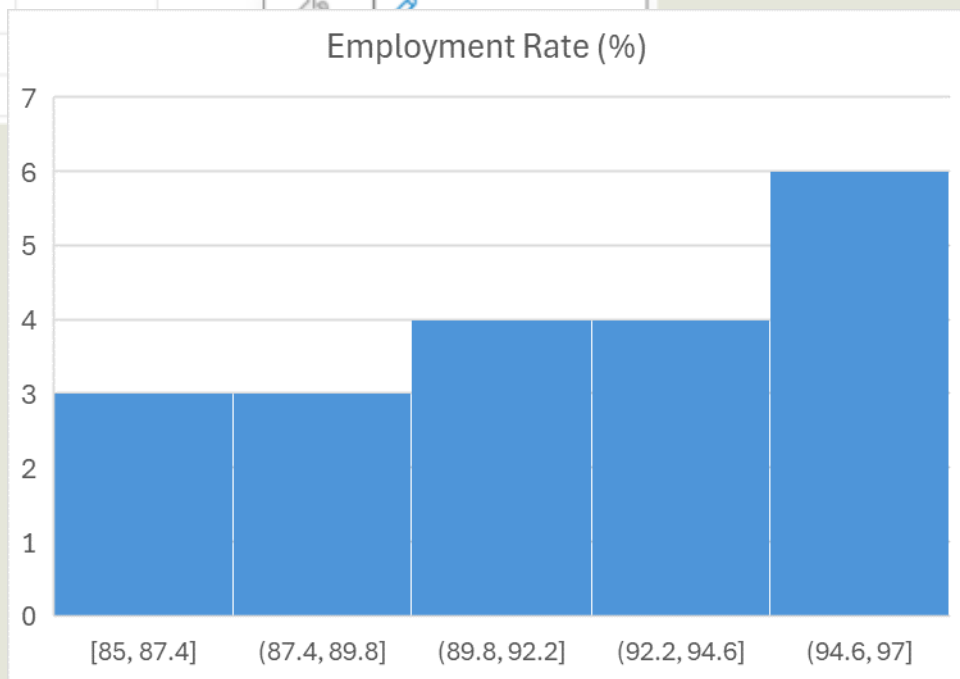
座標軸選項

間隔

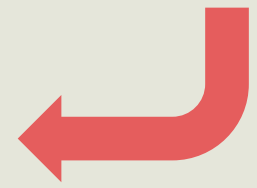
- 依類別(G)
- 自動(M)
- 間隔寬度(B) 2.4
- 間隔數目(N) 5
- 溢位間隔(V) 103.0 自動
- 反向溢位間隔(U) 81.0 自動

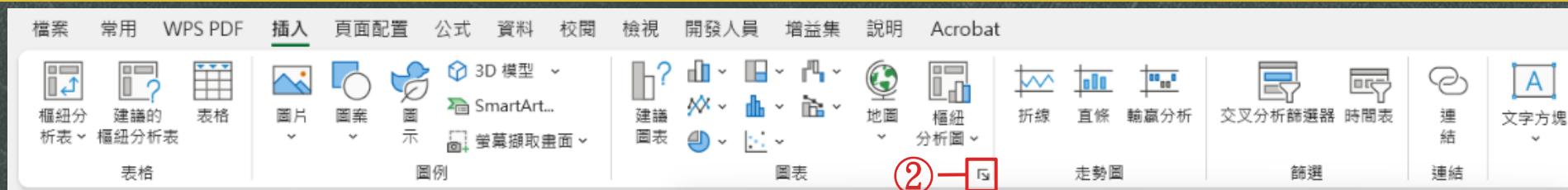
> 刻度

> 數值



⑤ 自訂間隔數目
Sturges' rule : $k = \lceil \log_2 n + 1 \rceil$





C1 : X ✓ fx Average Starting Salary (US\$) (起薪)

	A	B	C	D
	Major (科系)	Empl Rate (就業率)	Average Starting Salary (US\$) (起薪)	Average GPA (平均 GPA)
1				
2	Accounting		52000	3.18
3	Business		50000	3.11
4	Computer Science		76000	3.39
5	Economics		61000	3.32
6	Electrical Engineering	96	79000	3.44
7	Finance	93	61000	3.24
8	Information Systems	94	64000	3.29
9	Management	90	49000	3.08
10	Marketing	89	48000	3.15
11	Mathematics	95	67000	3.47
12	Mechanical Engineering	95	74000	3.41
13	Physics	94	70000	3.53
14	Psychology	87	45000	3.26
15	Statistics	96	71000	3.49
16	Biology	88	47000	3.22
17	Chemistry	90	56000	3.31
18	Civil Engineering	93	69000	3.36
19	Political Science	86	46000	3.19
20	Sociology	85	44000	3.17
21	Communication	88	47000	3.14

① 選取資料

插入圖表

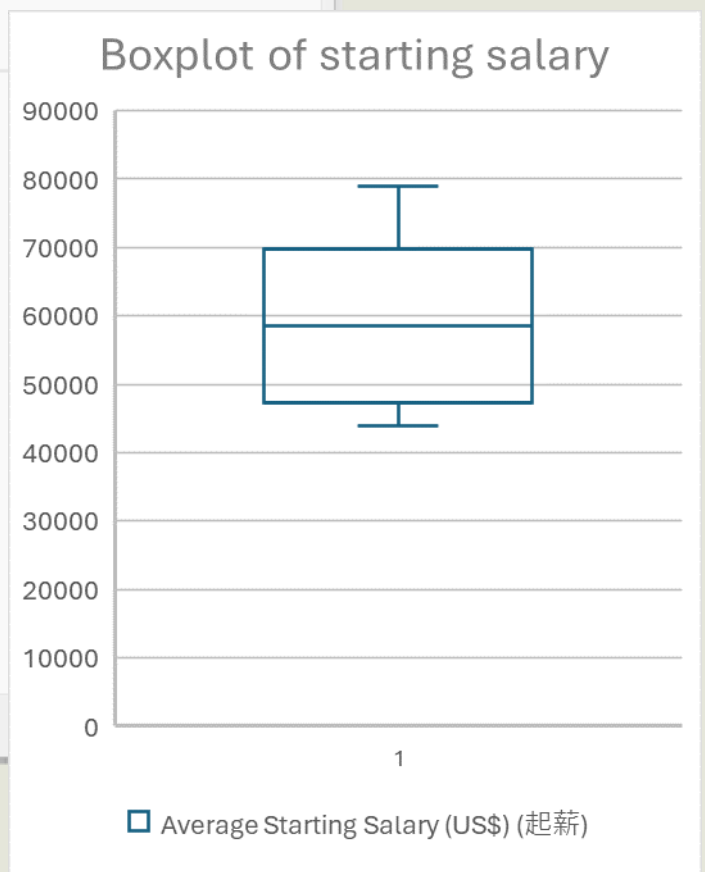
建議的圖表 所有圖表

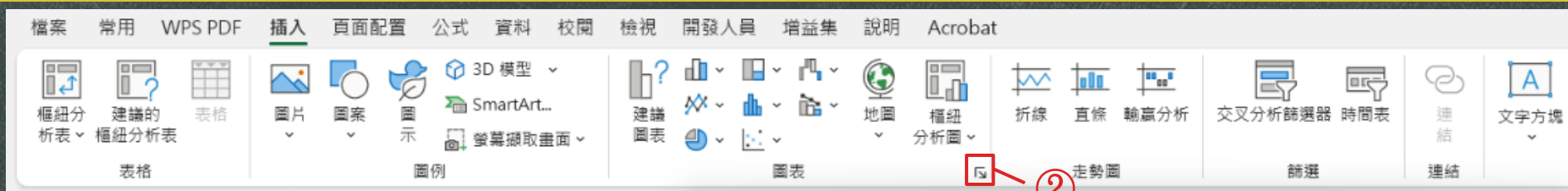
- 最近
- 範本
- 直條圖
- 折線圖
- 圓形圖
- 橫條圖
- 區域圖
- XY 散佈圖
- 地圖
- 股票圖
- 曲面圖
- 雷達圖
- 矩形式樹狀結構圖
- 放射環狀圖
- 長條圖
- 盒鬚圖**
- 瀑布圖
- 漏斗圖
- 組合圖

盒鬚圖

圖表標題

③





Major (科系)	Employment Rate (%) (就業率)	Average Starting Salary (US\$) (起薪)	Average GPA (平均 GPA)
Accounting	95	52000	3.18
Business	91	50000	3.11
Computer Science	97	76000	3.39
Economics	92	61000	3.32
Electrical Engineering	96	79000	3.44
Finance	93	61000	3.24
Information Systems	94	64000	3.29
Management	90	49000	3.08
Marketing	89	48000	3.15
Mathematics	95	67000	3.47
Mechanical Engineering	95	74000	3.41
Physics	94	70000	3.53
Psychology	87	45000	3.26
Statistics	96	71000	3.49
Biology	88	47000	3.22
Chemistry	90	56000	3.31
Civil Engineering	93	69000	3.36
Political Science	86	46000	3.19
Sociology	85	44000	3.17
Communication	88	47000	3.14

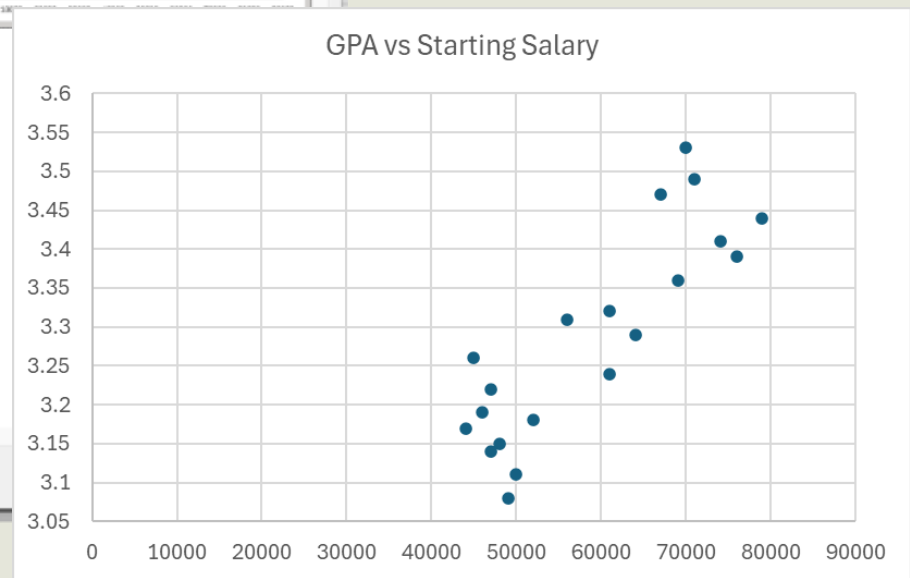
① 先選 GPA，
按住 Ctrl，
再選起薪

插入圖表

建議的圖表 所有圖表

- 最近
- 範本
- 直條圖
- 折線圖
- 圓形圖
- 橫條圖
- 區域圖
- XY 散佈圖
- 地圖
- 股票圖
- 曲面圖
- 雷達圖
- 矩形式樹狀結構圖
- 放射環狀圖
- 表條圖
- 盒鬚圖
- 瀑布圖
- 組合圖

散佈圖



作業題目(5)——點估計範例

作業一 5

題目資訊：

樣本數 $n = 90$

樣本平均 $\bar{x} = \$2026$

樣本標準差 $s = \$475$

信心水準 95%，假設 σ 未知

作業一 5(a)

計算邊際誤差 Margin of Error, ME

$$ME = t_{\alpha/2, n-1} \times \frac{s}{\sqrt{n}}$$

Excel

- =CONFIDENCE.T(0.05, 475, 90)
- =T.INV.2T(0.05, 89)*475/SQRT(90)

作業一 5(b)

計算 95% 信賴區間

$$(2026 - 99.49, 2026 + 99.49)$$

$$= (\$1926.51, \$2125.49)$$

作業一 5(c)

計算 Total amount

(點估計值 × 母體大小)

$$\$2026 \times 90 \text{ million} \approx \$1823 \text{ 億}$$

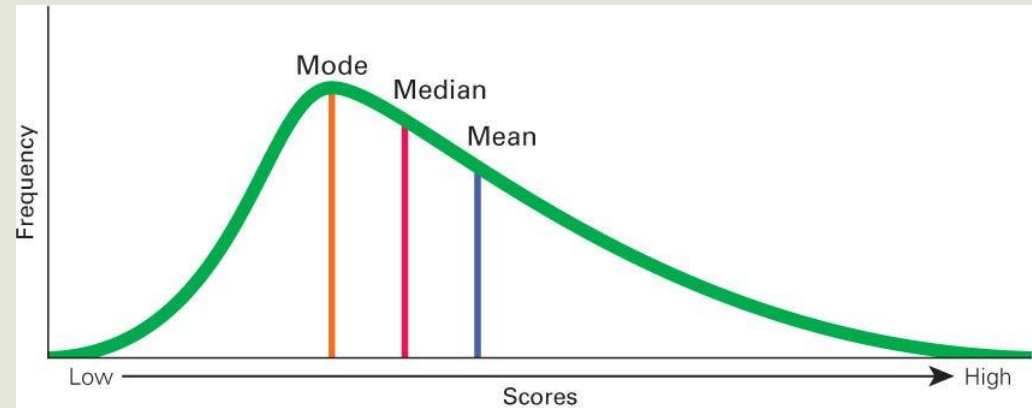
作業題目(5)

作業一 5(d)

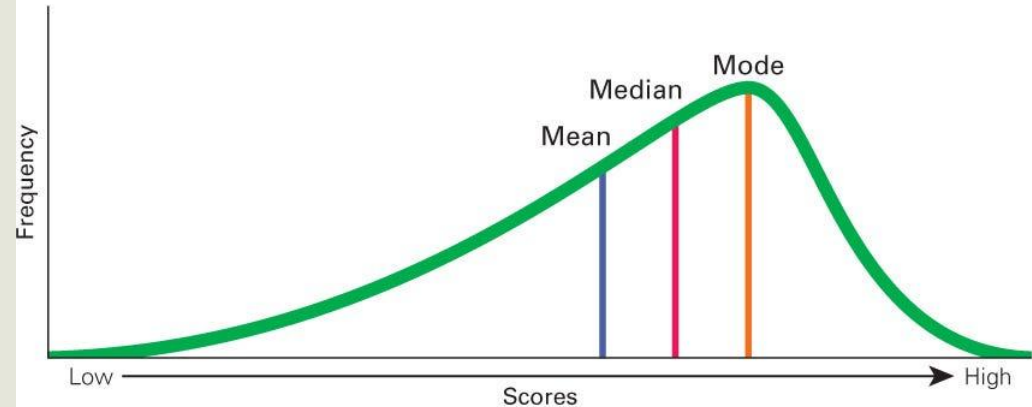
Skewed to the right

右偏：中位數 < 平均數

$$\text{median} < \bar{x}$$



(a) Right-skewed distribution



(b) Left-skewed distribution

Thank You!