高等微積分第四次小考

考試日期 December 28, 2006　　　　Fall 2006

1. 若 $f : I \to R$ 連續，其中 I 為開區間，且存在 $x_0 \in I$ 滿足 $f(x_0) > 0$。證明存在 $\delta > 0$，使得 $f(x) > 0\ \forall x \in (x_0-\delta, x_0+\delta)$

Pf: 由 ε-δ 的連續定義，因為 f 在 x_0 連續，$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$，

使得 $|f(x)-f(x_0)| < \varepsilon,\ \forall |x-x_0| < \delta$

令 $\varepsilon = \frac{1}{2}f(x_0) > 0$，則 $\exists \delta > 0$，使得 $|f(x)-f(x_0)| < \frac{1}{2}f(x_0),\ \forall |x-x_0| < \delta$

其中 $|f(x)-f(x_0)| < \frac{1}{2}f(x_0) \Rightarrow -\frac{1}{2}f(x_0) < f(x)-f(x_0) < \frac{1}{2}f(x_0)$

$\Rightarrow 0 < \frac{1}{2}f(x_0) < f(x) < \frac{3}{2}f(x_0)$ #

2. 若有界函數 f 滿足 $f : [0,1] \to R$，且

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in [0,1] \cap Q \\ -x, & x \in [0,1] \setminus Q \end{cases}$$

證明 f 不可積分。

Pf: 令 $P = \{x_0 = 0, x_1, x_2, \dots, x_n = 0\}$ 是 $[0,1]$ 的一組分割，因為 $f(x) = \begin{cases} x, & x \in [0,1] \cap Q \\ -x, & x \in [0,1] \setminus Q \end{cases}$

所以 $\begin{cases} M_i = \sup\{f(x) \mid x \in [x_{i-1}, x_i]\} = |x_i| \\ m_i = \inf\{f(x) \mid x \in [x_{i-1}, x_i]\} = -|x_i| \end{cases}$ 有理數及無理數的稠密性

因此，$U(f,P) - L(f,P) = \sum_{i=1}^{n}(M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} 2|x_i| \cdot (x_i - x_{i-1})$

$\geq \sum_{i=k+1}^{n} 2 \cdot \frac{1}{2}(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=k+1}^{n}(x_i - x_{i-1}) = x_n - x_k \geq 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

其中，$x_{k+1} \geq \frac{1}{2}$，$x_k < \frac{1}{2}$，也就是 $\lim_{n\to\infty}[U(f,P_n) - L(f,P_n)] \geq \frac{1}{2} \neq 0$

(即 f 不可積分) #

3. 若 $f : [a, b] \to R$ 為單調遞減，且 P_n 為 $[a,b]$ 的正規分割，其分割區間長度為 $(b-a)/n$。證明

(a) $U(f,P_n) - L(f,P_n) = \dfrac{(f(a)-f(b))(b-a)}{n}$

(b) f 在 $[a, b]$ 可積分。(註：使用(a)的結果。)

Pf: (a) $P_n = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ 為 $[a,b]$ 的正規分割，$x_i - x_{i-1} = \frac{b-a}{n}$

$\because$ f 為單調遞減，$\begin{cases} M_i = \sup\{f(x) \mid x \in [x_{i-1}, x_i]\} = f(x_{i-1}) \\ m_i = \inf\{f(x) \mid x \in [x_{i-1}, x_i]\} = f(x_i) \end{cases}$

因此，$U(f,P_n) - L(f,P_n) = \sum_{i=1}^{n}(M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n}(f(x_{i-1}) - f(x_i)) \cdot \frac{b-a}{n}$

$= \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n}(f(x_{i-1}) - f(x_i)) = \frac{b-a}{n}(f(x_0) - f(x_n))$

$= \frac{b-a}{n} \cdot (f(a) - f(b))$ #

(b) 由(a)可知 $U(f,P_n)-L(f,P_n)=\frac{b-a}{n}\cdot(f(a)-f(b))\to 0$ as $n\to\infty$

亦即 $\{P_n\}$ 為滿足 $\lim_{n\to\infty}[U(f,P_n)-L(f,P_n)]=0$ 的一組分割數列，

由 Theorem 6.8 可知 f 在 $[a,b]$ 可積分。#

4. 存在 $c>0$ 使得函數 $f:[a,b]\to R$ 滿足 $|f(u)-f(v)|\le c\cdot|u-v|$，$\forall u,v\in[a,b]$，
則對任意 $[a,b]$ 的分割 P，證明其必定滿足

$$0\le U(f,P)-L(f,P)\le c(b-a)\cdot gap\,P$$

(提示：使用極值定理及第五次作業第四題的 $\sum_{i=1}^{n}[x_i-x_{i-1}]^2\le(b-a)\cdot gap\,P$。)

pf: $\because |f(u)-f(v)|\le c|u-v|$, $\forall u,v\in[a,b]$ 這代表 f 是連續函數，

因此若 $P=\{x_0,x_1,\dots,x_n\}$ 是 $[a,b]$ 的分割，f 在每個分割區間

$[x_{i-1},x_i]$ 的極值必定存在，亦即 $\exists\, u_i,v_i\in[x_{i-1},x_i]$，

$$\begin{cases} f(u_i)=m_i=\inf\{f(x)\mid x\in[x_{i-1},x_i]\} \\ f(v_i)=M_i=\sup\{f(x)\mid x\in[x_{i-1},x_i]\}\end{cases}$$

但由已知條件知 $M_i-m_i=f(v_i)-f(u_i)\le c|v_i-u_i|\le c(x_i-x_{i-1})$，$\forall i$

$\Rightarrow U(f,P)-L(f,P)=\sum_{i=1}^{n}(M_i-m_i)(x_i-x_{i-1})\le c\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_{i-1})^2\le c(b-a)\,gap\,P$ #

由第五次作業第四題 $\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_{i-1})^2\le(b-a)gap\,P$.

5. 判斷並簡要說明以下各敘述的真偽：
(a) 若 $f:[a,b]\to R$ 可積分且 $\int_a^b f=0$，則 $f(x)=0,\ \forall x\in[a,b]$。
(b) 若 $f:[a,b]\to R$ 可積分，則 $f:[a,b]\to R$ 連續。
(c) 若 $f:[a,b]\to R$ 可積分且 $f(x)\ge 0,\ \forall x\in[a,b]$，則 $\int_a^b f\ge 0$。
(d) 若 $f:(a,b)\to R$ 連續，則 f 在 (a,b) 也有界。
(e) 若 $f:[a,b]\to R$ 連續，則 f 在 $[a,b]$ 也有界。

pf: (a) 不一定，例如：$[a,b]=[-1,1]$ 及 $f(x)=x$, $\forall x$

則 $\int_{-1}^{1}f(x)dx=0$，但 $f(x)\ne 0$, $\forall x$

(b) 不一定，例如：$[a,b]=[0,2]$，$f(x)=[x]$，$f(x)$ 在 $[0,2]$ 可積分

但 $f(x)$ 在 $x=1$ 不連續

(c) 正確，$\because f(x)\ge 0\Rightarrow\forall[a,b]$ 的分割 P_n，$U(f,P_n)\ge 0$，由 Lemma 2.21

可知 $\int_a^b f=\lim_{n\to\infty}U(f,P_n)\ge 0$

$\{P_n\}$ 是阿基米德分割數列

(d) 不一定，例如：$f(x)=\frac{1}{x}$ 在 $(0,1)$ 連續，但無上界

(e) 正確，由 Theorem 3.17 知閉區間上的連續函數必定均勻連續，

因此由反証法可知 f 必定有界。