

高齡死亡率模型的探討

A Study of Elderly Mortality Models

王信忠¹ 余清祥² 陳怡萱³

摘要

隨著醫藥科技等因素的發展，我國國民平均壽命逐年上升，高齡人口的死亡率下降尤為明顯，人口老化速度愈發明顯，國人對於退休生活、醫療需求更形殷切。為了因應老化及長壽的需求，近年政府提出不少政策都和老年人有關，包括全民健保、勞退新制、長期照護等，這些社會保險制度需要對未來人口及其結構，包括高齡人口的死亡率及其平均餘命等數值的推估，這些需求使得高齡死亡模型受到國內外各界的重視。

本文探討高齡死亡模型，主要分為兩類：關係模型、隨機模型，比較哪些模型適合用於因應長壽風險，考慮的模型包括 Gompertz、Coale and Kisker (1990)、Lee and Carter (1992)、Renshaw and Haberman (2006)、Cairns et al. (2006a) 以及王信忠、余清祥 (2011) 提出的折扣數列模型 (DS)，其中後者結合工程上可靠度函數 Weibull 分佈，另外提出折扣數列比值韋伯模型 (DSW)。本文以實證資料評估兩類模型的優劣，使用臺灣、日本、美國三國五齡組及單齡組死亡率資料，除了估計效果的比較，也以交叉驗證檢驗預測結果，分析發現 DSW 與 DS 關係模型分別在配適與預測上，也能如同隨機模型一樣得到高精確的預測結果。

關鍵字：長壽風險、高齡死亡模型、交叉驗證、Lee-Carter 模型、折扣數列

¹真理大學財務與精算系助理教授, au4369@mail.au.edu.tw, 02- 2621-2121 ext 3311.

²政治大學統計系教授, csyue@nccu.edu.tw, 02-29393091ext 81026.

³政治大學風險管理與保險學系碩士, 101358030@nccu.edu.tw.

壹、前言

人口老化及少子化是二十一世紀各國的共同趨勢，聯合國的世界人口展望報告（World Population Prospects: The 2012 Revision）指出，由於過去數十年總生育率持續下降，雖然減緩了全球人口的成長速度，但老年人口卻快速增加，預估全球 60 歲以上人口將由 2013 年的 8.4 億人，增加至 2050 年的 20 億人。此外，全球的兩性零歲平均餘命(俗稱平均壽命)將由 2005-2010 年 69 歲增至 2045-2050 年 76 歲；其中，經濟高度開發地區由 77 歲增至 83 歲，低度開發地區由 67 歲增至 75 歲。臺灣地區在 2012 年兩性平均壽命為 79.5 歲（資料來源：內政部統計處），根據經濟建設委員會（現併入國家發展委員會）的 2012 年人口推估，預期在 2060 年壽命將延長至 80 歲以上，而 65 歲以上人口（或稱老人人口）比例在 2025 年超過 20%，進入超高齡社會。

表 1、歷年美國女性各年齡層對平均餘命的貢獻⁴（單位：%）

年齡層	1850- 1901	1901- 1925	1925- 1950	1950- 1975	1975- 1990	1990- 2009
0	14	32	15	21	10	4
1-14	55	8	16	12	4	2
15-49	25	38	39	20	7	4
50-64	3	13	19	17	20	11
65-79	2	8	11	24	41	37
80+	0	1	0	6	17	41
加總	100	100	100	100	100	100

註：紅字為貢獻較為顯著的年齡層。

隨著環境衛生改善、醫藥科技等因素的進步，嬰幼兒等年輕族群的死亡改善率已大幅減緩，未來平均餘命的延長與高年齡層死亡改善有關（Thatcher 1999；Vladimir and Robert 2005），而 Arriaga (1984)、Vaupel (1986)、Vaupel and Yashin (1987)，Oeppen and Vaupel(2002)、林麗芬等人(2003)及 Shkolnikov et al.(2012)等

⁴ 作者引用 Vaupel J.W. 於 2014 美國精算學會（Society of Actuaries）舉辦之 Living to 100 Symposium V 研討會發表內容重新製表。

也探討各年齡死亡率的改變對平均餘命延長的貢獻。另外，陳寬政（2009）以 2005 年的男、女性年齡別死亡率，以分別降低 0.964% 與 1.413% 的條件，模擬經建會推估之 2055 年與 2015 年的各年齡死亡率，發現 60 歲以下的死亡率都無變化，且主要變化都集中在 60 歲以上。表 1 為美國女性零歲死亡率改善對平均餘命貢獻的比例，從 1850-1901 年 14% 下降至 1990-2009 年 4%，但是 80 歲以上死亡率改善對平均餘命貢獻的比例則從 0% 上升至 41% (Vaupel, 2014)。另外，由日本、美國及臺灣的男、女性的死亡率變化趨勢（圖 1），也顯示出零歲死亡率由原先 1970 年的快速下降，在 2009 年的下降幅度已逐漸平緩，但高齡死亡率下降並無減緩的趨勢（圖 2）。其中日本高齡人口的死亡率下降趨勢最為明顯，日本女性在 1970 至 2009 年間，75 歲及 85 歲死亡率大致減半。

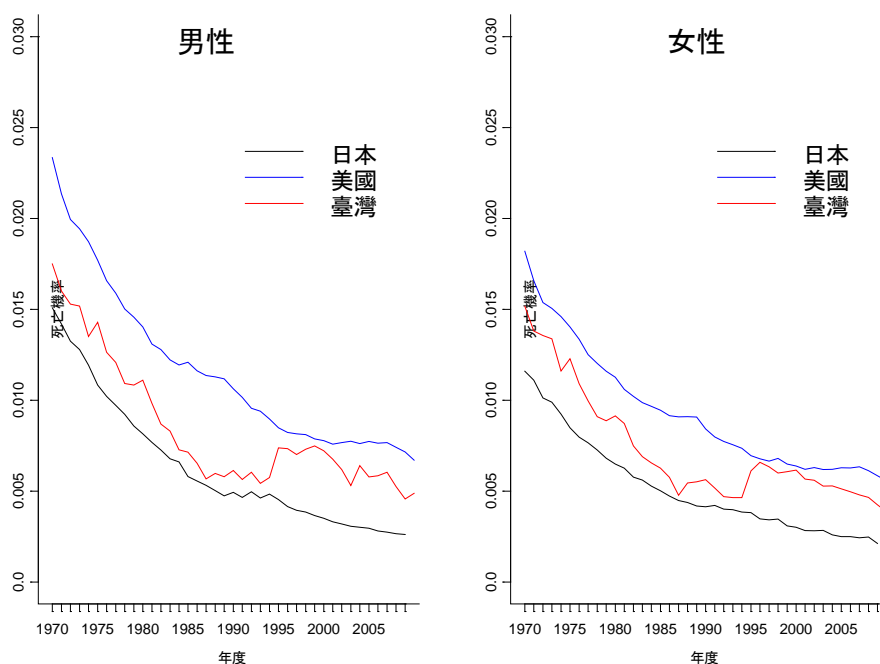


圖 1、零歲死亡率歷年趨勢圖

然而什麼年齡可算是老年，以及退休年齡應為多少較為合適呢？Fuchs（1984）引進經濟學中實際價格必需考量通貨膨脹調整的觀念，將年齡分為名義年齡（Nominal Age）和真實年齡（Real Age），名義年齡是一般的年齡，真實年齡是根據平均餘命或死亡率變化調整後的年齡。Sanderson and Scherbov（2008）進一步提出，一個人可以有兩種年齡：一種是實足年齡（Chronological Age）或

是稱為過去年齡 (Retrospective Age)，反映出生到現在存活的時間長度；另一為未來年齡 (Prospective Age) 亦即計算特定年齡平均餘命或剩餘平均餘命 (Remaining Life Expectancy)。

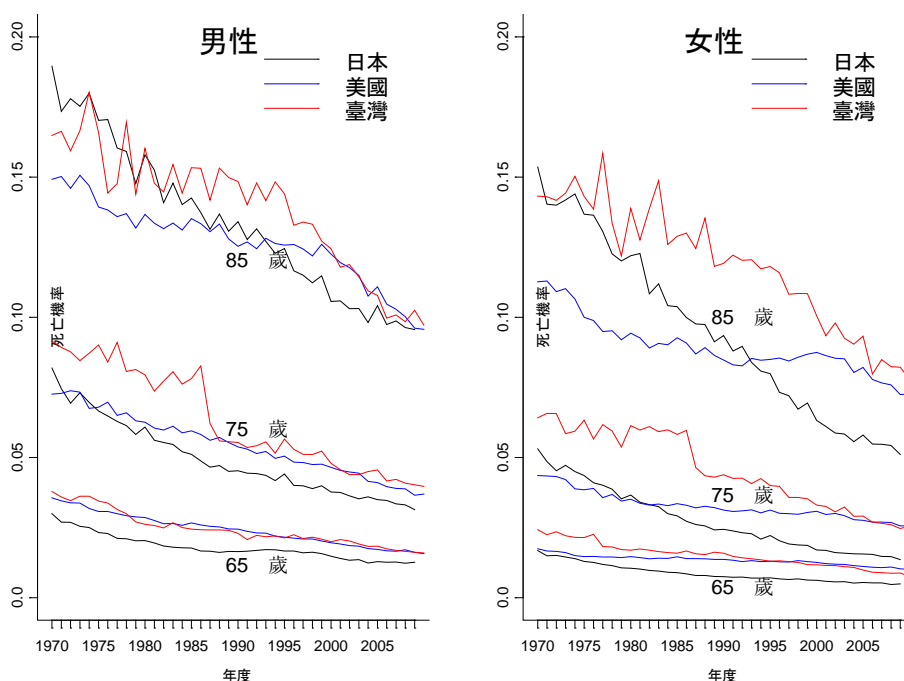


圖 2、65 歲、75 歲及 85 歲死亡率歷年趨勢圖⁵

根據上述的老年定義，不少已開發國家將退休年齡由 60 歲（例如：日本、法國）、65 歲（例如：英國、德國）等逐步提高至 62 歲到 67 歲。對照 Sanderson and Scherbov 的剩餘平均餘命概念，以臺灣、日本及美國為例如表 2，2009 年 65 歲的日本男性、女性分別相當於 1970 年的 56 歲、54 歲；2009 年 65 歲美國男性、女性則相當於 1970 年的 57 歲、60 歲；而 2009 年 65 歲臺灣男性、女性則均相當於 1970 年 57 歲。隨著死亡率下降，預期未來的剩餘平均餘命將繼續延長，換言之，退休年齡也應隨之調整，我國近年公務人員退休制度由 75 制改為 85 制，也可視為根據壽命延長調整的制度。然而，代入剩餘平均餘命概念調整退休年齡，也需要未來各年齡層人口的死亡率，尤其是高齡人口，因此探討高齡死亡率模型是本文的研究目標。

⁵ 作者參考 Vaupel J.W. 於 2014 美國精算學會 (Society of Actuaries) 舉辦之 Living to 100 Symposium V 研討會發表內容，繪製日本、美國及臺灣死亡率歷年趨勢圖。

表 2、2009 年與 1970 年的年齡對照表⁶

2009 年 的年齡	男性（1970 年的年齡）			女性（1970 年的年齡）		
	臺灣	日本	美國	臺灣	日本	美國
55	47	46	47	47	44	50
65	57	56	57	57	54	60
75	66	66	68	67	65	71
85	76	77	81	78	76	82
95	87	88	94	89	87	93

有關高齡死亡率模型的研究，大致區分成兩類：關係模型（Relational Model）及隨機模型（Stochastic Model）。關係模型假設死亡率等生命函數符合某種函數，每個年度各自找出該函數的參數，不會受到資料年數不足的影響，類似統計的參數估計，再以求出的參數描述死亡率的特性及變化，可用於編算生命表的高齡死亡率等，至今使用依舊頻繁。我國生命表即使用 Gompertz 模型（Gompertz, 1825），假設對數死亡率隨年齡而直線增高用來推估高齡死亡率。Coale-Kisker 模型（Coale and Kisker, 1990）是另一個常見的關係模型，可視為 Gompertz 模型的推廣，其他模型包括：Makeham (1860)、Weilbull (1951)、Heligman and Pollard (1980)、英國精算學會（Continuous Mortality Investigation Bureau, CMIB; 1999）的縮減因子（Reduction Factor）模型，以及王信忠、余清祥（2011）折扣數列（Discount Sequence）模型等。

而隨機死亡率模型較為強調死亡率與時間（年代）、世代的關連，由各年齡死亡率找出共同變化趨勢，像是假設各年齡的對數死亡率隨時間線性下降的 Lee-Carter 模型（Lee and Carter, 1992），其參數求解通常透過奇異值分解法（Singular Value Decomposition），原理類似矩陣裡的特徵值（Eigenvalue）。Renshaw and Haberman 模型（Renshaw and Haberman, 2006）則在 Lee-Carter 模型架構下加入世代效應（Cohort Effect）因子效應，參數求解過程較為複雜，大多藉由遞迴（Iteration）反覆計算，但其中牽涉非線性數值優化（Non-linear Optimization），不見得能保證估計值的穩定性，雖然其得到比 Lee-Carter 模型較小的 BIC（Bayes Information Criterion），但其有過度配適及缺乏穩健性的問題

⁶作者參考 Vaupel J.W. 於 2014 美國精算學會（Society of Actuaries）舉辦之 Living to 100 Symposium V 研討會發表內容，以臺灣資料製表。

(Wang and Yue, 2015)，這也是近年來加入世代因子隨機模型持續發展的主因之一。另外，最近頗受歡迎的高齡死亡率模型 CBD 模型 (Cairns et al., 2006a) 也是常見隨機模型，其假設模型內一個參數對所有年齡的死亡率皆有影響，另一個參數對於高齡死亡率的影響幅度會高於低年齡層所受的影響，用來預測英國未來死亡率得到不錯的結果。

本文後續章節考慮的模型，以Gompertz模型、Coale-Kisker模型、Lee-Carter模型、Renshaw and Haberman模型、CBD模型（以下分別簡稱CK、LC、RH、CBD模型）⁷及王信忠、余清祥（2011）提出的折扣數列模型（DS），結合工程上可靠度函數Weibull分佈，另外提出折扣數列比值韋伯模型（DSW）為主。其中LC、RH與CBD模型，參數估計方法採用Cairns et al. (2006b) 的最大概似估計法（Maximum Likelihood Estimation；簡稱MLE），或是參考Brillinger（1986）及Haberman and Renshaw（2009）的遞迴方式。而Gompertz與CK模型參數估計，則利用生存人數或死亡人數加權最小平方法（WLS）方法。

在實證分析上，我們使用美國加州大學柏克萊分校（University of California, Berkeley）的死亡資料庫（Human Mortality Database, HMD），挑選臺灣、日本、美國三國的男女兩性五齡組及單齡資料，五齡組為 60-64 ~ 94-99 歲（8 組），單齡為 60-99 歲(40 組)與 85-99 歲(20 組)死亡率資料。以交叉驗證(Cross-validation) 評估模型優劣，資料分成估計（Training）及預測（Testing）兩部分，為了測試資料區間對結果的影響，分為三組不同時期的資料：1970~2009 年、1980~2009 年及 1990~2009 年，共有 108 種情況。為了比較各種模型的配適能力，本文以 MAPE(Mean Absolute Percentage Error)作為模型優劣的比較基準，定義如下：

$$MAPE = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{|\hat{Y}_i - Y_i|}{Y_i} \times 100\% , \quad (1)$$

其中 Y_i 為觀察值、 \hat{Y}_i 為估計值。根據 Lewis (1982) 依 MAPE 的預測能力分級，以 20% 為良好、50% 為合理預測界限，詳細分級參照表 3。

⁷ Gompertz 模型、Coale-Kisker 模型、Lee-Carter 模型、Renshaw and Haberman 模型、CBD 模型死亡率模型介紹請參考附錄一及相關文獻。

表 3、MAPE 預測能力分級 (Lewis, 1982)

MAPE	<10%	10%~20%	20%~50%	>50%
預測能力	高精確度	良好	合理	不正確

考量 MAPE 有對稱性問題 (Lack of Symmetry)，本文也搭配 AIC (Akaike Information Criterion) 和 BIC (Bayes Information Criterion) 兩種指標綜合檢驗模型的配適能力。AIC 公式中加入了參數個數，以修正多餘參數的造成的影響；BIC 公式中則同時加入了參數個數、觀察值個數，以抵銷觀察值個數的影響；兩者皆為值愈小、模型配適能力愈佳。AIC 與 BIC 的定義如下：

$$AIC = -2\log(L) + 2k$$

$$BIC = -2\log(L) + k\log(n)$$

其中 L 為最大似估計量， k 為模型中參數個數， n 為觀察值個數。

另外，模型配適結果的好壞，可能會因所選擇的配適、預測期間與年齡等而有所差異。本文使用交叉驗證法模擬多種情境，套用統計學習理論 (Statistical Learning Theory) 的投票 (Voting) 作法，設定門檻值，取用多數決當作最後判別的結果。

本文編排如下：第二節介紹折扣數列比值韋伯模型及其配適能力探討；第三節探討各種模型配適能力的差異；第四節則進行模型預測比較；第五節則為結論與建議，提出研究心得與後續研究的可能方向。

貳、折扣數列比值韋伯模型

死亡率模型是否能捕捉死亡率的特性，也取決於資料品質、資料量等因素，高齡死亡率尤其如此，80 歲以上人口的資料在 1980 年代之前非常缺乏，近二十多年才有較為可信且充足的高齡資料，這也是高齡死亡模型進展較慢的原因之一。以臺灣為例，即使擁有較為可信的戶籍登記制度，但最高年齡組的紀錄在 1950 年代僅至 70 歲，1980 年代提高至 85 歲、到 1990 年代才增至 100 歲及

以上（記為 100+）。換言之，如果探討臺灣高高齡（85 歲以上）人口的死亡率，頂多只有三十年左右的資料，其中 100+ 的資料更只有十餘年。但即便有完整及可信的資料，高齡人口常因人數較少，死亡率較易呈現不規則震盪的，因此年齡越高、死亡率震盪程度越大。過去研究大多認為隨機模型的預測誤差較小，但也通常無法將死亡率推估到資料範圍以外，例如：若資料的年齡範圍為 0 至 99 歲，推論 100 歲以上高齡死亡率需要另行處理，因此本文使用王信忠、余清祥（2011）的折扣數列模型，結合 Weibull 分佈，另外提出折扣數列比值韋伯模型（DSW）。

王信忠、余清祥（2011）的折扣數列模型，引進吃角子老虎問題（Bandit Problem）折扣數列的概念，其想法是在累積更多資訊與獲得立即獎勵（Information vs. Immediate Payoff）中取得平衡。折扣數列用於死亡率時如同存活函數，具有漸增失敗率（Increasing Failure Rate）的特性，折扣數列若具有規律性，尋找最佳化策略會比較容易。首先定義折扣數列比值（Discount Sequence）：

$$r_x(t) = \frac{p_{x+1}(t)}{p_x(t)}, \quad (2)$$

其中 $p_x(t) = \frac{l_{x+1}(t)}{l_x(t)}$ 為現年 x 歲的人在第 t 年之存活機率（The probability that age x will attain age $x + 1$ at period year t ）， $l_x(t)$ 為生存數，屬於生命表函數之一，表示第 t 年 l_0 個新生兒可存活至 x 歲的期望人數（The expected number of survivors to age x from the l_0 newborns at period year t ）。

折扣數列比值可藉由參數函數或無母數方法求取參數。以臺灣 1970-2009 年男、女性歷年折扣數列比值為例（圖 3），發現各年齡數值波動現象有減緩及平滑化的趨勢（其他國家也類似），因此建議以 Weibull 函數配適折扣數列比值⁸

$$r_x(t) = \exp(-(x/b(t))^{a(t)}) \quad (3)$$

其中， $a(t)$ 為形狀參數（Shape Parameter）， $b(t)$ 為尺度參數（Scale Parameter）。

⁸ 韋伯分配（Weibull Distribution）是可靠度分析（Reliability Analysis）的常見模型，用以描述金屬等材質隨時間退化的現象。

為了計算死亡機率 q_x ，我們透過存活機率 p_x ，以兩個步驟方式求解。因為

$\ln(-\ln(r_x(t)))$ 為 $\ln x$ 的線性函數，可以使用加權最小平方法（Weighted Least

Squares, WLS）求得 $a(t)$ 與 $b(t)$ 的參數估計值及 $\hat{r}_x(t)$ 。

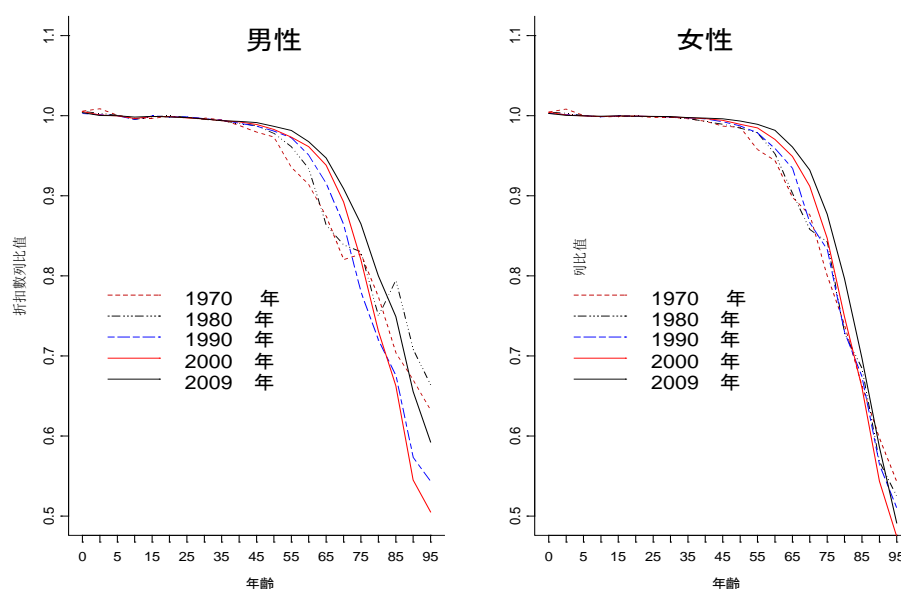


圖 3、臺灣折扣數列比值圖（1970、1980、1990、2000、2009 年）

接著，使用非線性極值（Nonlinear Maximization）及統計軟體 R 中的“nlminb”（a local minimizer for smooth nonlinear functions subject to bound-constrained parameters）函數，藉由最小化式（3）求得存活機率起始值 $\hat{p}_x(t)$ ：

$$\min_{\hat{p}_x(t)} \sum_x w_x (\ln(p_{x+1}(t)) - \ln(\hat{p}_x(t)) - \ln(\hat{r}_x(t)))^2, \quad (4)$$

其中 w_x 為 x 歲的死亡人數。再由 $\hat{r}_x(t) = \frac{\hat{p}_{x+1}(t)}{\hat{p}_x(t)}$ 計算得到所有年齡層的存活機

率 \hat{p}_y ， $y = x+1, x+2, \dots$ ；再透過 $q_y + p_y = 1$ 方程式，求出 $x+1$ 歲（含）以上的死

亡機率。另外，如果折扣數列具有規律性，即滿足 $p_{x+1}(t) \leq p_x(t)$ ，則式（4）才

能求得較佳的起始估計值。接著我們將探討此模型的配適能力。

我們首先以臺灣、日本、美國高齡資料進行模型配適，表 4 為折扣數列比值

韋伯模型在五齡組及單齡資料的MAPE值，發現臺灣男女兩性的 60-99 歲的單齡結果最差，主要原因是折扣數列比值大於 1 的資料量較多⁹，其他狀況的MAPE平均在 10%以下；日本五齡組資料MAPE較差，但也不超過 15%，單齡則以高高齡組最佳，MAPE均不到 3.5%；美國的MAPE最低，平均不到 5%，其中又以高高齡組（85~99 歲）者最佳。換言之，使用折扣數列比值韋伯模型似乎能捕捉高齡死亡率的變化，因此我們將在下節納入AIC、BIC等評斷標準與其他模型比較。

表 4、DSW 在臺灣、日本、美國的模型估計誤差 (MAPE)

MAPE(%)	配適期間	臺灣		日本		美國	
		男	女	男	女	男	女
五齡組 (年齡 60~99 歲)	1970-2009	6.2	6.6	14.0	12.3	6.0	4.9
	1980-2009	7.1	6.9	12.4	12.1	6.8	4.6
	1990-2009	7.5	7.4	10.3	7.8	7.9	4.8
單齡 (年齡 60~99 歲)	1970-2009	40.3	58.4	8.9	12.2	6.4	6.5
	1980-2009	44.4	64.3	7.2	12.0	4.0	4.6
	1990-2009	40.7	57.2	6.8	8.7	3.5	5.3
單齡 (年齡 85~99 歲)	1970-2009	7.3	7.5	3.3	2.6	1.3	1.0
	1980-2009	8.8	9.1	2.4	2.2	1.0	0.9
	1990-2009	9.3	9.7	1.9	1.4	1.0	0.8

註：數字加底色者為模型配適較差。

參、模型配適結果分析

本節我們以 1970-2009 年資料為代表，呈現各種模型的比較，首先為了便於說明各模型的估計結果，我們以 2007-2009 年的三年平均死亡率對數值為對象，比較死亡率及各模型估計值的差異（臺灣的結果參考圖 4，日本及美國的結果參見附錄圖 1、2）。臺灣男性、女性五齡組的死亡率估計，所有模型的估計值與觀察值都很接近，又以 Gompertz、RH 及 CBD 模型的配適效果好；日本及美國的

⁹以 HMD 資料庫中臺灣生命表為例：2009 年男性 60 歲死亡率 0.01216，61 歲死亡率 0.01181 計算之折扣數列比值 $r_{60}(2009)=1.00035$ ；男性 85 歲死亡率 0.10255，86 歲死亡率 0.10143 計算之折扣數列比值 $r_{85}(2009)=1.00125$ 均大於 1，違反規律性的要求。

五齡組結果大致類似，只有 CBD 模型明顯異於其他模型，估計值與觀察值差異很大。另外，因為模型參數愈多、估計誤差通常較小，以下將分別以 AIC、BIC 及 MAPE 指標及套用統計學習理論(Statistical Learning Theory)的投票(Voting)作法，比較各種模型的配適能力。

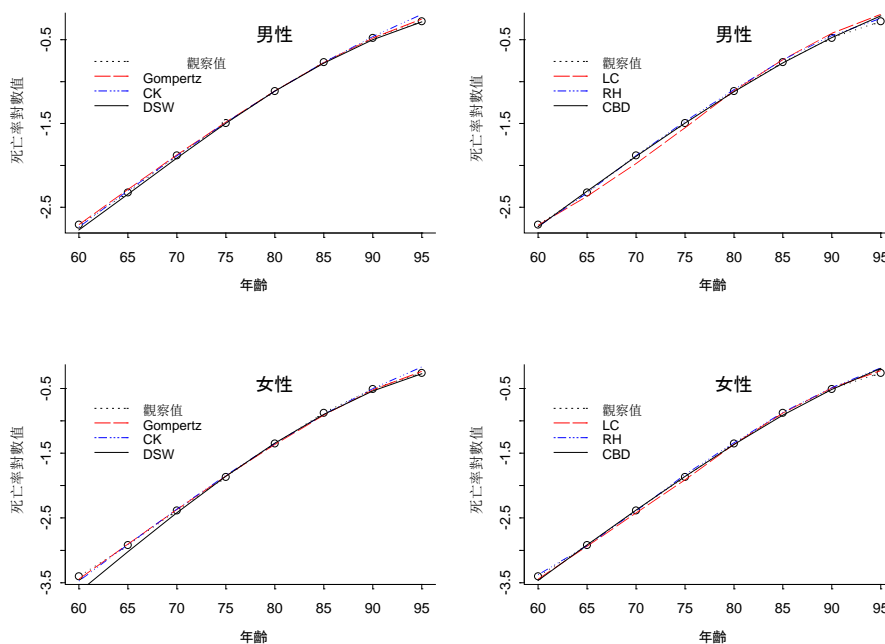


圖 4、臺灣 2007-2009 年五齡組死亡率對數值的估計

大致而言，若以 MAPE 為評斷依據，Gompertz、LC、RH 模型的效果較佳；若以加入參數個數的 AIC 及加入觀察值個數的 BIC 為依據，則是 Gompertz、DSW、LC 三個模型較佳（各模型的 BIC 數值參考表 5，AIC 及 MAPE 的結果詳見附錄表 1、2）。我們將各種資料期間、年齡格式的結果整理為表 6，列出各種狀況下前三名模型，模型的各种評斷標準的數值，礙於篇幅，只於附錄表 3、4、5 呈現五齡組情的詳細數值。

因為模型優劣與資料類型（期間、年齡格式）有關，並無模型在所有狀況都居於絕對優勢，在此套用統計學習理論(Statistical Learning Theory)的投票(Voting)作法，計算各模型名列前三名的次數。平均而言，各種模型表 6 中至多

出現 54 次；換個角度思考，因為總共有 6 種模型，只要在表 6 出現次數超大於 27 次就是超乎預期，亦即模型的估計效果較佳。以這個角度思考（參考表 7），計算各模型前三名的總次數超過 27 者分別為 LC、DSW、RH 這三個模型，其中 LC 模型在高齡組表現都不錯，只有近年的高高齡單齡結果稍差；DSW 模型在五齡組較佳，但在臺灣的單齡資料中不盡理想；RH 模型則是在單齡的結果特別突出，但在五齡組的表現平平。進一步比較三個關係模型（Gompertz, CK, DSW）、三個隨機模型（LC, RH, CBD），發現兩種類型的前三名次數大致相當（關係模型 80 次 vs. 隨機模型 82 次），亦即以估計的角度，關係模型和隨機模型並無明顯的優劣，建議讀者可依據個人偏好、實際狀況挑選合乎需求的模型。

表 5、1970-2009 年五齡組各模型的 BIC 值比較

模型	臺灣		日本		美國	
	男性	女性	男性	女性	男性	女性
Gompertz	-645	-822	-1162	-1182	-1338	-1318
CK	-466	-548	-268	-410	-1421	-1661
DSW	-1208	-1418	-887	-1221	-406	-616
LC	-757	-1020	-805	-961	-932	-1276
RH	-581	-640	-474	-652	-655	-737
CBD	-228	-390	284	189	262	173

註：數字加黃色底色的結果最佳、綠色次之、藍色第三

表 6、不同年齡組、資料時間的推薦模型（以 BIC 為指標）

年齡組	資料期間	優先順序	臺灣		日本		美國	
			男性	女性	男性	女性	男性	女性
五齡組 (60-99 歲)	1970-2009	1	DSW	DSW	G	DSW	CK	CK
		2	LC	LC	DSW	G	G	G
		3	G	G	LC	LC	LC	LC
	1980-2009	1	DSW	DSW	DSW	DSW	DSW	DSW
		2	G	LC	G	G	G	G
		3	LC	G	LC	LC	LC	LC
	1990-2009	1	G	DSW	G	LC	DSW	DSW
		2	DSW	LC	DSW	DSW	LC	LC
		3	LC	G	LC	G	G	G
單齡 (60-99 歲)	1970-2009	1	RH	RH	RH	RH	RH	RH
		2	CK	CK	LC	DSW	LC	DSW
		3	LC	LC	DSW	LC	CBD	CBD
	1980-2009	1	RH	RH	RH	RH	RH	DSW
		2	CK	CK	LC	DSW	DSW	RH
		3	LC	LC	DSW	LC	LC	LC
	1990-2009	1	RH	RH	RH	RH	RH	DSW
		2	CBD	LC	LC	DSW	DSW	RH
		3	LC	CK	DSW	LC	LC	LC
單齡 (85-99 歲)	1970-2009	1	RH	RH	RH	RH	RH	RH
		2	G	LC	CK	CK	CK	CK
		3	CBD	CK	LC	CBD	DSW	DSW
	1980-2009	1	G	CBD	RH	RH	RH	RH
		2	CK	CK	CK	CK	DSW	DSW
		3	RH	RH	LC	CBD	CK	CK
	1990-2009	1	CBD	CBD	CK	CK	RH	DSW
		2	CK	CK	RH	DSW	DSW	CK
		3	G	G	LC	RH	CK	RH

註：加底色者為 DSW 模型；Gompertz 模型以符號 G 表示。

以 1970~2009 年、1980~2009 年及 1990~2009 年不同資料期間比較模型，除了發現兩類模型在估計不分軒輊，也發現模型效果的確與資料的年齡格式有關，

修正模型在單齡資料明顯優於原始模型。例如：CK 模型可視為 Gompertz 模型的推廣，在高齡組及高高齡的單齡都有改善（表 7），但有趣的是高齡五齡組反而較差；RH 模型為 LC 模型的進階版（加入世代效應），在高齡組的單齡資料確實有明顯改善，但高高齡沒有多少差異，甚至在高齡五齡組效果較差。整體而言，修正者未必優於原始模型，LC 模型仍舊是所有模型中最佳者，只有在高高齡單齡資料中較差。

除了估計結果的比較外，下一節將繼續比較模型的預測，但限於篇幅，原則上預測以本節較佳的模型為代表。其中，RH 模型中的世代效應有別於年代（或時間）效應，通常不是時間的線性函數或是簡單的多項函數，實務上多半只在估計時加入世代效應，預測時只考慮年代效應¹⁰，因此隨機模型僅討論 LC 和 CBD 模型。關係模型的著眼點也類似，因為 Gompertz 和 CK 模型的參數，也不是時間的簡單函數，以電腦模擬方法（例如：區塊拔靴法）也未必有效果，以下的關係模型將僅考量 DS 模型。

表 7、各模型在 BIC 為指標的前三名次數

模型	五齡組	單齡 (高齡)	單齡 (高高齡)	各模型 總數
DSW	16	11	7	34
LC	18	17	4	39
Gompertz	18	0	4	22
CK	2	5	17	24
RH	0	18	16	34
CBD	0	3	6	9
各年齡總數	54	54	54	162

肆、模型預測比較

本節延續前述的模型比較，探討高齡死亡率模型的預測特性，套用實證資料與交叉驗證（Cross-validation），將資料分成測試期（Training Period）與驗證期（Testing Period），先以測試期資料找出各模型的參數，再預測在驗證期的死亡

¹⁰ Renshaw and Haberman (2006) 以 RH 模型預測英格蘭和美國的男性死亡率，發現有過度配適及缺乏穩健性的問題，本文以日本男、女性資料重複驗證，檢測出類似不穩定的結果。

率，並與驗證期的實際資料比對預測誤差。上述方法或稱為Backcast，可譯為後見預測、或是事後預測，因為未來結果不能預知，只能假設我們回到五年前（或十年前），以歷史資料預測過去這五年。不過，因為中長期事後預測的誤差較大（王信忠等，2012），本研究僅考量五年的短期預測，基底年數（Baseline Year）則統一訂為十年，換言之，我們以過去十年的資料預測未來五年的死亡率¹¹。另外，為避免推估年度的影響，在此也變動資料年度，類似Moving Window的作法，計算所有預測誤差的平均值。

舉例而言，本研究考量臺灣、日本、美國三個國家男性與女性的60-99歲年齡的死亡率，資料時間為1970~2009年。例如：我們以1970~1979年（十年）資料配適模型，再預測1980~1984年（五年）的死亡率；相同步驟也用於（測試期、驗證期）分別為（1971~1980年、1981~1985年）、...、（1995~2004年、2005~2009年），如此共有26種組合。接著計算所有組合的預測誤差之平均，作為評估模型優劣的依據。

如前一節所述，本節只考量LC、CBD、DS三個模型的預測結果。除了採用的時間數列方法（ARIMA）外，本研究仿造王信忠等人的作法（2012），採用類似隨機模型的區塊拔靴法，以電腦模擬推估出未來數值。DS模型使用兩種預測方法：一是透過LC模型及ARIMA方法求出60歲死亡率的預測值 $\hat{q}_{60}(t)$ ，再以1000

次區塊拔靴法模擬未來60歲至99歲高齡存活機率的比值 $\hat{r}_x(t) = \frac{\hat{P}_{x+1}(t)}{\hat{P}_x(t)}$ ，兩者相乘

即可得出各年齡死亡率的預測值 $\hat{q}_x(t)$ ；另一種是透過中央死亡率分解成兩個函

數的乘積，即 $m_x(t) = h_x(t) \times r_x(t)$ ，分別以區塊拔靴法推估未來的 $\hat{h}_x(t)$ 及 $\hat{r}_x(t)$ 。以

下是這些預測方法的整理：

- Model DS1：以LC模型推估60歲死亡率 $\hat{q}_{60}(t)$ ，再以區塊拔靴法模擬1000

¹¹ 十年或其他年數的事後預測的作法類似，限於篇幅，在此僅展示五年的死亡率預測。

次存活機率的比值，取中位數作為 $r_x(t)$ 的預測值。

- Model DS2：以區塊拔靴法模擬 1000 次 $h_x(t)$ 及 $r_x(t)$ ，取中位數為預測值。
- Model LC1：以 ARIMA 推估 1000 次參數 κ_t ，取其中位數作為預測值。
- Model LC2：1000 次模擬區塊拔靴法推估參數 κ_t ，取中位數當作預測值。
- Model CBD1：以 ARIMA 推估 1000 次參數 κ_t^I 、 κ_t^{II} ，取其中位數作為預測值。
- Model CBD2：1000 次區塊拔靴法模擬推估參數 κ_t^I 、 κ_t^{II} ，取中位數為預測值。

因為各國男女兩性各有 26 個事後預測的 MAPE 誤差值，為簡化討論，在此只列出預測誤差的平均數（表 8），詳細結果列於附表 6 至附表 8。雖然 LC1 模型有最小的平均預測誤差，而且在六種國家及性別的組合中有兩次最佳，但各模型的預測誤差並無明顯差異，單以誤差數值的平均判斷模型未必合適，我們仿造前一節的作法，也以各模型佔六種模型前三名的總次數為評估依據（表 9）。前三名總次數的結果大致與平均 MAPE 誤差的結果類似，MAPE 較小的 LC1、LC2、DS2 模型，前三名的總次數也較多，而 LC1 模型以 MAPE 平均數、前三名總次數都是最佳。

表 8、各模型五年預測誤差 MAPE（單位%）

模型	臺灣		日本		美國		平均
	男性	女性	男性	女性	男性	女性	
DS1	9.9	8.9	5.2	5.2	3.7	4.3	6.2
DS2	8.3	7.4	4.7	5.0	3.4	4.1	5.5
LC1	8.3	7.3	4.3	4.3	3.5	4.0	5.3
LC2	9.2	7.5	4.6	4.1	3.5	4.5	5.6
CBD1	8.0	7.4	5.2	7.2	3.8	6.4	6.3
CBD2	8.3	6.7	5.1	7.1	4.2	7.0	6.4

註：數字加底色者為模型預測最佳者。

我們也嘗試了十年前的短期預測，同樣採用上述的事後預測，根據十年資料預測未來十年，結果也和五年預測類似，平均 MAPE 預測誤差都小於 10%，屬於高精確性等級的預測，而且 LC1 模型是六個模型中最佳者，限於篇幅在此不詳細說明。雖然過去有研究指出 LC 模型套用於所有年齡層的死亡率估計及預測時，可能在幼齡或高齡產生較大的誤差，但綜合本節的事後預測、上一節的模型估計，可以發現 DS、LC 模型在三個國家的預測誤差較佳，但 CBD 模型在臺灣預測較佳（與估計結果相同），若 LC 模型只用於高齡死亡率，其結果仍是各模型最佳。推測原因，可能是高齡死亡率的特性及趨勢變化較為一致，亦即死亡率特性較為均質（Homogeneous），用於描述臺灣、日本、美國 60~99 歲高齡死亡率有不錯的效果。不過，由表 8 五年預測誤差的數值，我們認為本文考量的三種預測模型的準確率都很高，如同上節的估計，關係模型及隨機模型都適用於高齡死亡率的短期預測。

表 9、各模型的為預測前三名的總次數

模型	臺灣		日本		美國		總次數
	男性	女性	男性	女性	男性	女性	
DS1	6	2	7	14	11	14	54
DS2	11	13	13	16	17	18	88
LC1	17	13	18	19	19	23	109
LC2	8	13	18	25	18	20	102
CBD1	17	15	12	4	9	3	60
CBD2	19	22	10	0	4	0	55

註：數字加底色者為模型預測最佳者。

伍、結論與建議

壽命延長是二十一世紀的共同趨勢。以 Sanderson and Scherbov (2008) 的剩餘平均餘命衡量，比較日本、美國與臺灣的剩餘 5 年及 10 年平均餘命之特定年齡（圖 5），我國與日本均持續上升，美國女性有些微減緩的現象。剩餘平均

餘命與退休年齡有關，1970 年 57 歲的臺灣男性等同於 2009 年的 65 歲（表 2），如果未來退休年齡不變，因為預計會繼續壽命延長，必須有更多準備才能因應退休後的需求。Mayhew（2005）指出人口老化會造成勞動力老化、勞工短缺，以及退休期間長、年金成本升高與稅收減少等問題；另一方面，老年人的醫療利用也高於年輕族群，像是重大傷病發生率隨年齡而上升（黃泓智等 2004），預期國人醫療需求將隨人口老化更形殷切。

然而，無論社會保險或商業保險商品，需要依賴可靠的死亡率預測，但目前全民健保等社會保險並未將死亡率改善列入考量，勢必低估壽命延長的衝擊（或稱為長壽風險），影響國家財務健全、個人財務規劃，以及造成保險等產業的經營危機。這也是近年許多國家及公司積極投入延壽研究的主因，尤其是著重於建立合宜的高齡死亡模型，其中高齡死亡模型搭配金融商品（如延壽年金、風險證券化等），是許多國家因應長壽風險的主要方法之一。近年我國政府也推出幾項新政策以因應延壽風險，包括勞退新制、公務人員退撫新制、以及籌辦中的長期照護保險等，但這些措施都需要估算未來的死亡率及平均餘命（尤其是高齡者），確保這些制度的財務自主、以及符合民眾的實際需求。

本研究以探討高齡死亡模型為目標，希冀研究結果可作為政策參考，主要探討兩種死亡模型：關係模型、隨機模型。由於各國高齡死亡率的特性不同，也缺乏足夠的歷史資料，哪些高齡死亡率模型較佳至今尚無定論，但一般認為隨機模型有較小的估計及預測誤差，但隨機模型多半受限於資料，將現有年齡範圍推廣至更高年齡需要加入額外的假設條件，因此本文除了考慮隨機模型外，也加入可經過外推方式獲得資料範圍外高齡死亡率的關係模型。本文考量的模型包括關係模型：Gompertz、Coale and Kisker（1990）以及王信忠與余清祥（2011）三個模型，隨機模型則有 Lee and Carter（1992）、Renshaw and Haberman（2006）、Cairns et al.（2006a）三個模型。

本文比較關係模型與隨機模型的六種模型，雖然近年隨機模型受到較多的注意，但本文分析臺灣、日本、美國資料，以估計的角度而言，無論依據估計 MAPE、

或是加入參數個數（及觀察值個數）的 AIC 及 BIC，發現關係模型毫不遜色，在估計死亡率依舊具有一定優勢。以預測的角度衡量，關係模型也很有競爭力，比較臺灣、日本、美國的五年及十年的短期事後預測（Backcast），雖然折扣數列模型的誤差略遜 LC 模型一籌，也與隨機模型非常接近，同屬於 Lewis（1982）的高精確性等級。因為關係模型操作較為簡單，且其參數的詮釋能力也較強，若能兼顧估計方法（Yue, 2002），建議讀者仍可將關係模型列入考量，根據各國國情、以及問題需要等因素，在這兩類模型中做出合宜的選擇。

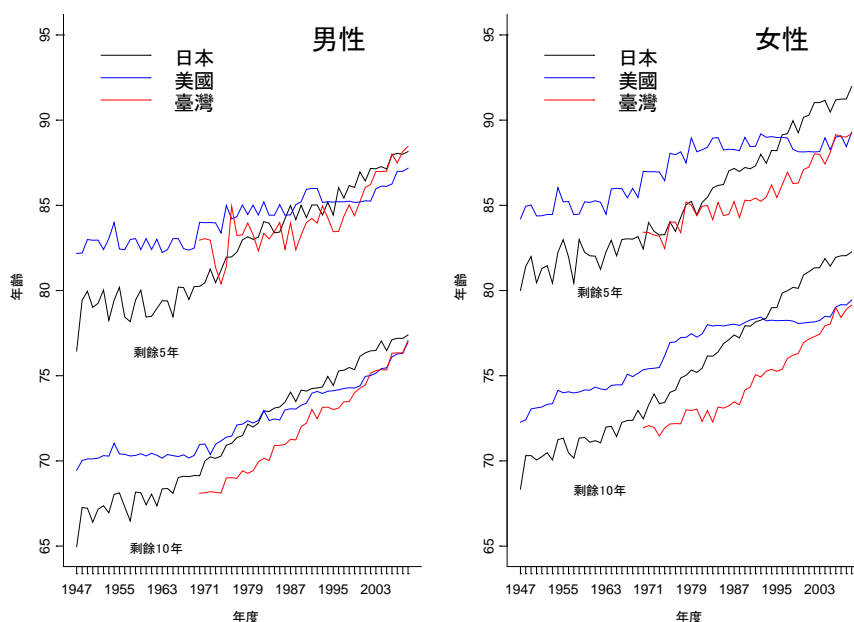


圖 5、剩餘 5 年及 10 年平均餘命之特定年齡比較¹²

本文各模型的預測比較，因考量的國家、年齡、時間等因素較繁雜，僅以短期預測（五年及十年）為目標，未來可考量高齡死亡記錄更完整的國家，例如：英國、冰島有超過 80 年以上的百歲資料，瑞典、法國甚至有 100 年以上的高齡死亡記錄¹³，如此便可進行中長期的 Backcast。有了更長時期的資料，我們可依

¹²作者參考 Vaupel J.W. 於 2014 美國精算學會（Society of Actuaries）舉辦之 Living to 100 Symposium V 研討會發表內容，繪製日本、美國及臺灣剩餘平均餘命圖。

¹³Human Mortality Database 蒐集全球 37 個國家的人口及死亡資料，其中以歐洲國家的記錄最為完整。

據不同資料區間及年齡層探討模型的穩健度，更全面性的比較關係模型及隨機模型，除了以誤差比較死亡率外，也可探索模型參數代表的意義，比較兩種模型參數的變化，以不同角度詮釋高齡死亡率的趨勢。

無論是本文考量的關係模型及隨機模型，或是其他常見的模型，許多研究和我們都認為死亡率會繼續下降，壽命極有可能會延續近年的趨勢，人口老化勢必加重國家的負擔，現行許多觀念及制度必須因時制宜，搭配本文探討的高齡死亡模型才能顯出成效。除了上述提到的延後退休年齡的可行性，包括賦稅等的配套措施，或許國人對於生涯規劃、老年定義等的議題需要重新思考，以因應少子化及社會變遷對家庭及個人造成的衝擊。例如：過去平均受教育年數約 12 年（高中、高職畢業），亦即在 20 歲前後進入職場，若在 60 歲退休、且平均壽命 70 歲，等同於以一生工作 40 年支持 70 年的生活支出；若平均壽命為 80 歲，且假設和過去生產力相當，則現代人一生需工作大約 45 年，何時退休也根據進入職場年齡、薪資所得、個人生活需求等因素調整。

參考文獻

一、中文部分

- 王信忠、余清祥（2011）規律折扣數列與高齡死亡率，*人口學刊*，43：37-70。
- 王信忠、金碩與余清祥（2012）小區域死亡率推估之研究，*人口學刊*，45：121-145。
- 林麗芬、林作民與吳蕙菁（2003）比較台灣地區與日本、瑞典的死亡率下降趨勢對年金訂價的影響，*人口學刊*，27：37-66。
- 陳寬政（2009）人口老化的原因與結果，*人文及社會科學簡報*，10（2）：28-39。
- 黃泓智、劉明昌與余清祥（2004）臺灣地區重大傷病醫療費用推估，*人口學刊*，29：35-70。

二、英文部分

- Arriaga, E. E. 1984. "Measuring and Explaining the Change in Life Expectancies." *Demography* 21(1): 83-96.
- Brillinger, D.R. 1986. "The Natural Variability of Vital Rates and Associated Statistics." *Biometrics* 42: 693-734.
- Brouhns, N., Denuit, M., and Vermunt J.K. 2002. "A Poisson Log-bilinear Regression Approach to the Construction of Projected Life Tables." *Insurance: Mathematics and Economics* 31: 373-393.
- Cairns, A.J.G., Blake, D., and Dowd, K. 2006a. "Pricing Death: Framework for the Valuation and Securitization of Mortality Risk." *ASTIN Bulletin* 36:79-120.
- Cairns, A.J.G., Blake, D., and Dowd, K. 2006b. "A Two-factor Model for Stochastic Mortality with Parameter Uncertainty: Theory and Calibration." *Journal of Risk and Insurance* 73(4): 687-718.
- Canudas-Romo, V. and Schoen, R. 2005. "Age-Specific Contributions to Changes in The Period and Cohort Life Expectancy." *Demographic Research* 13(3): 63-82.

- Coale, A.J and Kisker, E.E. 1990. "Defects in Data on Old-age Mortality in the United States: New Procedures for Calculating Mortality Schedules and Life Tables at the Highest Ages." *Asian and Pacific Population Forum* 4:1–31.
- Continuous Mortality Investigation Bureau (CMIB) 1999. "*Mortality Improvement Model for use with the 92'Series of Mortality Tables.*" Continuous Mortality Investigation Reports No 17.
- <http://www.actuaries.org.uk/research-and-resources/documents/cmi-report-17-hole-volume> (Date visited: July 28, 2014).
- Fuchs, V.R. 1984. "Though Much is Taken: Reflections on Aging, Health, and Medical Care." *The Milbank Memorial Fund Quarterly: Health and Society* 2: 142–66.
- Gompertz, B. 1825. "On the Nature of the Function Expressive of the Law of Human Mortality and on a New Mode of Determining Life Contingencies." *Philosophical Transactions of the Royal Society of London* 115: 513–585.
- Haberman, S. and Renshaw, A. 2009. "On Age-Period-Cohort Parametric Mortality Rate Projections." *Insurance: Mathematics and Economics* 45: 255–270.
- Kannisto, V., Lauristen, J., Thatcher, A.R., Vaupel, J.W. 1994. "Reduction in Mortality at Advanced Ages." *Population and Development Review* 20:793–810.
- Lee, R.D., Carter, L. 1992. "Modeling and Forecasting the Time Series of U.S. Mortality." *Journal of the American Statistical Association* 87: 659–675.
- Lewis , E. B. 1982. "Control of Body Segment Differentiation in *Drosophila* by the Bithorax Gene Complex." *Embryonic Development, Part A: Genetics Aspects, Edited by Burger, M. M. and R. Weber. Alan R. Liss, New York, 269–288.*
- Lee, R.D. and Miller, T. 2001. "Evaluating the Performance of the Lee-Carter Method for Forecasting Mortality." *Demography* 38: 537–549.
- Mayhew, L. 2005. "Active Ageing in the UK-issues, Barriers, Policy Directions."

- Innovation: The European Journal of Social Science Research* 18(4): 455– 477.
- Oeppen, J. and Vaupel, J. W. 2002. “Broken Limits to Life Expectancy.” *Science* 296:1029–1031.
- Renshaw, A.E. and Haberman, S. 2006. “A Cohort-Based Extension to the Lee-Carter Model for Mortality Reduction Factors.” *Insurance: Mathematics and Economics* 38(3): 556–570.
- Shkolnikov, V. M., Dmitri, A. J., Evgeny, M. A. and Vaupel, J. W. 2011. “Steep Increase in Best-Practice Cohort Life Expectancy.” *Population and Development Review* 37(3):419–434.
- Thatcher, A. R. 1999. “The Long-Term Pattern of Adult Mortality and the Highest Attained Age.” *Journal of the Royal Statistical Society. Series A (Statistics in Society)* 162 (1): 5–43.
- Wang, H. C. and Yue, C. J. 2015. “Mortality, Health and Marriage: A Study Based on Taiwan’s Population Data.” *North American Actuarial Journal* 19(3): 187–199.
- Wilmoth, J.R. 1995. “Are Mortality Rates Falling at Extremely High Ages? An Investigation Based on a Model Proposed by Coale and Kisker.” *Population Studies* 49: 281–295.
- Vaupel, J. W. 1986. “How Change in Age-Specific Mortality Affects Life Expectancy.” *Population Studies* 40(1): 147–157.
- Vaupel J.W. 2014. “The Advancing Frontier of Human Survival.” *Living to 100 Symposium V*, Society of Actuaries, online Monograph.
- Vaupel, J. W. and Yashin, A. I. 1987. “Repeated Resuscitation: How Lifesaving Alters Life Tables.” *Demography* 24(1): 123–135.
- Yue, C.J. 2002. “Oldest-Old Mortality Rates and the Gompertz Law: A Theoretical and Empirical Study Based on Four Countries.” *Journal of Population Studies* 24: 33–57.

附錄、高齡死亡模型

一、高齡死亡模型介紹

本附錄介紹本文比較之高齡死亡模型，包括 Gompertz 模型、Coale-Kisker 模型、Lee-Carter 模型、Renshaw and Haberman 模型、CBD 模型：

1、Gompertz 模型

Gompertz (1825)根據 19 世紀介於 20 至 60 歲成年人的死亡率資料，發現死力會隨著年齡呈現指數上升，或是瞬間死亡率滿足年齡函數，如下式：

$$\mu_x = BC^x, \quad B > 0, C > 1, \quad (1)$$

其中 μ_x 為瞬間死亡率 (Instantaneous Mortality Rate) 或死力 (Force of Mortality)，而 B、C 為 Gompertz 假設參數， x 代表年齡。

2、Coale-Kisker 模型

Coale and Kisker (1990)提出與 Gompertz 模型類似的高齡死亡模型，假設 x 歲死亡率的改變幅度滿足 $k_x = \ln m_x - \ln m_{x-1}$ 。CK 模型有二個基本假設：

- 1) 85 歲以上人口死亡率的增加幅度是隨著年齡增長而線性下降的；即

$$k_x = k_{85} + (x - 85) \cdot s, \quad (2)$$

其中 s 代表 k_x 變化的斜率。

- 2) 110 歲人口的死亡率是固定值，不隨時間改變；男、女性最高年齡死亡率 m_{110} 分別為 1.0 與 0.8。

根據第 1 個假設可以求得各年齡中央死亡率為：

$$m_x = m_{84} \exp\left(\sum_{y=85}^x (k_{85} + (y - 85) \cdot s)\right) \quad (3)$$

Wilmoth (1995)將式(3)改為：

$$m_x = m_{84} \exp\left((x - 84)k_{85} + \frac{(x - 84)(x - 85)}{2} s\right) \quad (4)$$

取對數可得：

$$\ln(m_x) = \ln(m_{84}) + (x - 84)k_{85} + \frac{(x - 84)(x - 85)}{2} s = A + Bx + Cx^2 \quad (5)$$

本文使用 Wilmoth (1995)的 CK 模型。

3、Lee and Carter 模型

Lee and Carter (1992)提出預測美國及日本的死亡率變動模型：

$$\ln(m_{x,t}) = \beta_x^{(1)} + \beta_x^{(2)} \kappa_t^{(2)} + \varepsilon_{x,t} \quad , \quad (6)$$

並且 $q_{x,t} = 1 - \exp(-m_{x,t})$ ， $m_{x,t} = \frac{D_{x,t}}{E_{x,t}}$ ；根據 Brouhns et al. (2002)改進 Lee-Carter

提出的方法，假設死亡人數服從 *Poisson* 分佈，即假設 $D_{x,t} \sim \text{Poisson}(E_{x,t} \mu_x(t))$ ，

$\mu_x(t) = \exp(\beta_x^{(1)} + \beta_x^{(2)} \kappa_t^{(2)})$ 。上式(6)中 $m_{x,t}$ 代表在年代 t ， x 年齡組人口的中央死亡

率(Central Death Rate)， $\beta_x^{(1)}$ 為年齡組死亡率的平均曲線， $\beta_x^{(2)}$ 為年齡組之相對死

亡率變化速度， $\kappa_t^{(2)}$ 是 t 年之死亡率強度， $\varepsilon_{x,t}$ 是誤差項。

4、Renshaw and Haberman (2006)三因子模型（簡稱 RH 模型）

Renshaw and Haberman (2006)提出的廣義 Lee-Carter 模型加入世代效應 (Cohort Effect) 因子，發現套用於英格蘭和美國的男性死亡資料，可得優於 Lee-Carter 模型 BIC (Bayes Information Criterion)，但其有過度配適及缺乏穩健性的問題，模型如下：

$$\log(m_{x,t}) = \beta_x^{(1)} + \beta_x^{(2)} \kappa_t^{(2)} + \beta_x^{(3)} \gamma_c^{(3)} + \varepsilon_{x,t} \quad (7)$$

其中 $\sum_t \kappa_t^{(2)} = 0$ ， $\sum_x \beta_x^{(2)} = 1$ ， $\sum_{x,t} \gamma_{t-x}^{(3)} = 0$ ， $\sum_x \beta_x^{(3)} = 0$ ； $\beta_x^{(1)}$ 為年齡組死亡率的平

均曲線， $\beta_x^{(2)}$ 、 $\beta_x^{(3)}$ 為年齡組之相對死亡率變化速度， $\kappa_t^{(2)}$ 是 t 年之死亡率強度，

$\gamma_c^{(3)}$ 是 c 世代之死亡率強度， $\varepsilon_{x,t}$ 是誤差項。

5、CBD (Cairns, Blake, and Dowd)隨機死亡率模型

Cairns et al. (2006)提出預測英國(United Kingdom)未來死亡率變動的模型，模型假設如(8)式，兩個參數都與時間有關，參數 $\kappa_t^{(1)}$ 與適用於各年齡死亡率，而

參數 $\kappa_t^{(2)}$ 則對高齡死亡率的影響幅度高於低年齡層：

$$\text{logit}(q_{x,t}) = \kappa_t^{(1)} + \kappa_t^{(2)}(x - \bar{x}) + \varepsilon_{x,t} \quad (8)$$

其中 $\text{logit}(q_{x,t}) = \ln\left(\frac{q_{x,t}}{1-q_{x,t}}\right)$ ， $q_{x,t} = 1 - \exp(-m_{x,t})$ ， $m_{x,t} = \frac{D_{x,t}}{E_{x,t}}$ ；假設死亡人數服從

具有平均數 $E_{x,t} \cdot m_{x,t}$ 的 *Poisson* 分配，即 $D_{x,t} \sim \text{Poisson}(E_{x,t} m_{x,t})$ 。 \bar{x} 代表採用資料

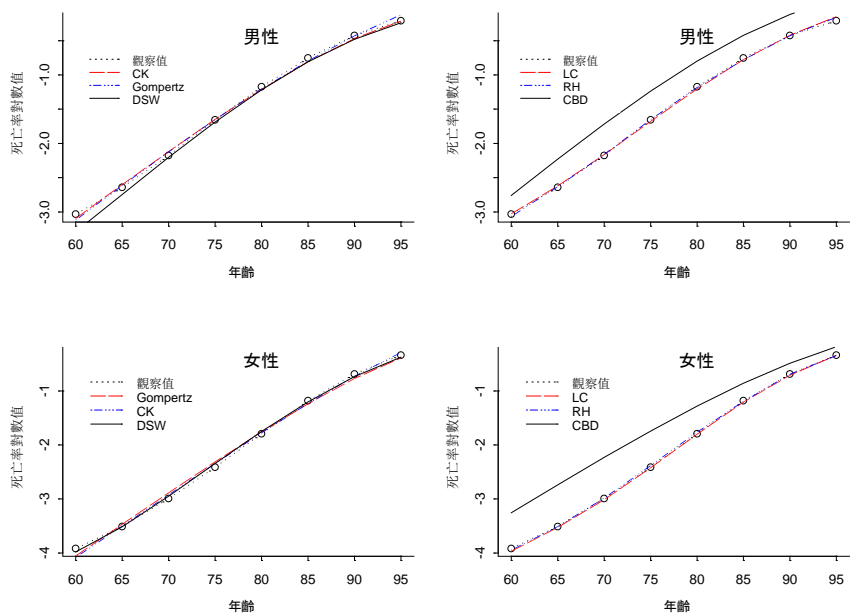
範圍年齡的平均數， $m_{x,t}$ 代表在年代 t 及 x 年齡組人口的中央死亡率， $D_{x,t}$ 為 x

歲年齡組在年代 t 的死亡人數， $E_{x,t}$ 為 x 歲年齡組在年代 t 的生存人數。 $\kappa_t^{(1)}$ 、 $\kappa_t^{(2)}$

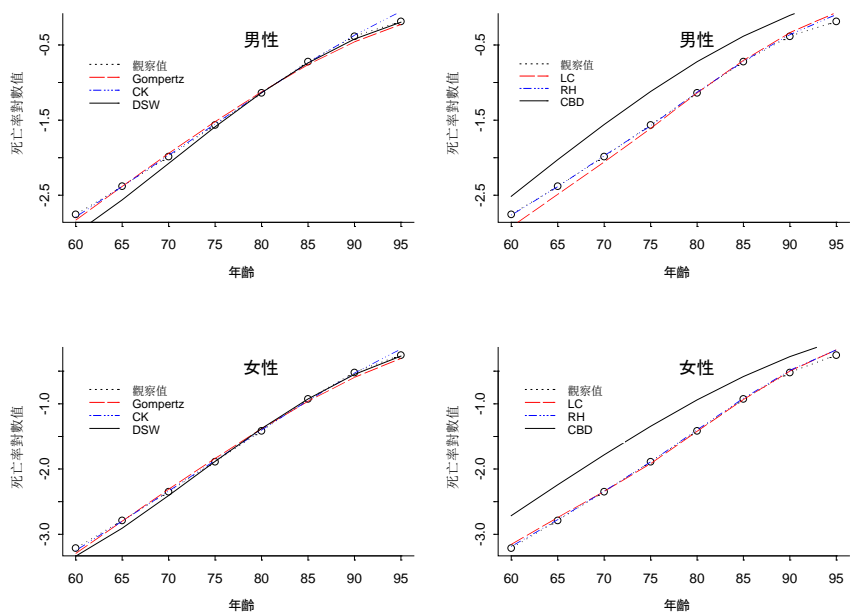
表期間效應(Period Effect)， $\kappa_t^{(1)}$ 為死亡率水準(Level of Mortality)， $\kappa_t^{(2)}$ 為斜率

(Slope Coefficient)， $\varepsilon_{x,t}$ 為 x 歲年齡組在年代 t 的隨機誤差。

二、高齡死亡模型相關圖形與表格



附圖 1、日本死亡率的各模型估計結果



附圖 2、美國死亡率的各模型估計結果

附表 1、臺灣、日本、美國的模型 AIC (黃色最佳、綠色次之、藍色第三)

AIC	臺灣		日本		美國	
	男性	女性	男性	男性	女性	男性
Gompertz	-946	-1123	-1463	-1483	-1640	-1620
Coale-Kisker	-918	-1000	-721	-862	-858	-1068
DSW	-1675	-1884	-1353	-1687	-1887	-2127
LC	-960	-1224	-1009	-1164	-1135	-1479
RH	-985	-1043	-877	-1056	-1058	-1140
CBD	-530	-692	-17	-112	-40	-128

附表 2、臺灣、日本、美國的模型 MAPE (黃色最佳、綠色次之、藍色第三)

MAPE(%)	臺灣		日本		美國	
	男性	女性	男性	男性	女性	男性
Gompertz	5.1	4.2	2.8	4.3	2.3	3.5
Coale-Kisker	4.3	4.1	4.5	5.4	3.2	3.2
DSW	6.2	6.6	14.0	12.3	6.0	4.9
LC	5.1	3.8	3.8	3.3	3.0	2.4
RH	4.6	4.0	3.8	2.9	2.6	6.3
CBD	7.4	5.9	35.0	50.1	34.5	48.3

附表 3、臺灣五齡組 60-99 歲的模型估計結果 (MAPE、AIC、BIC)

		1970-2009		1980-2009		1990-2009	
		男性	女性	男性	女性	男性	女性
Gompertz	MAPE(%)	5.1	4.2	4.1	3.8	2.4	2.5
	AIC	-946	-1123	-833	-878	-823	-719
	BIC	-645	-822	-625	-669	-700	-596
Coale-Kisker	MAPE(%)	4.3	4.1	4.7	4.2	4.1	3.7
	AIC	-918	-1000	-647	-769	-408	-502
	BIC	-466	-548	-334	-456	-224	-317
DSW	MAPE(%)	6.2	6.6	7.1	6.9	7.5	7.4
	AIC	-1675	-1884	-1216	-1421	-812	-963
	BIC	-1208	-1418	-892	-1097	-621	-771
LC	MAPE(%)	5.1	3.8	4.5	3.2	2.6	2.3
	AIC	-960	-1224	-675	-929	-625	-722
	BIC	-757	-1020	-522	-776	-521	-617
RH	MAPE(%)	4.6	4.0	3.9	3.4	3.3	2.9
	AIC	-985	-1043	-748	-829	-497	-548
	BIC	-581	-640	-445	-526	-291	-342
CBD	MAPE(%)	7.4	5.9	5.9	5.4	3.6	3.7
	AIC	-530	-692	-494	-560	-520	-477
	BIC	-228	-390	-285	-351	-397	-354

附表 4、日本五齡組 60-99 歲的模型估計結果 (MAPE、AIC、BIC)

		1970-2009		1980-2009		1990-2009	
		男性	女性	男性	女性	男性	女性
Gompertz	MAPE(%)	2.8	4.3	2.8	4.8	2.6	5.3
	AIC	-1463	-1483	-1186	-1202	-939	-845
	BIC	-1162	-1182	-978	-993	-816	-722
Coale-Kisker	MAPE(%)	4.5	5.4	4.5	5.5	4.2	5.3
	AIC	-721	-862	-590	-739	-420	-567
	BIC	-268	-410	-276	-426	-235	-382
DSW	MAPE(%)	14.0	12.3	12.4	12.1	10.3	7.8
	AIC	-1353	-1687	-1124	-1328	-822	-1008
	BIC	-887	-1221	-800	-1004	-631	-816
LC	MAPE(%)	3.8	3.3	3.2	2.2	2.7	1.7
	AIC	-1009	-1164	-861	-1109	-622	-974
	BIC	-805	-961	-708	-955	-517	-869
RH	MAPE(%)	3.8	2.9	3.4	4.6	2.8	16.3
	AIC	-877	-1056	-722	-774	-509	-242
	BIC	-474	-652	-420	-471	-303	-36
CBD	MAPE(%)	35.0	50.1	37.8	55.1	3.7	60.8
	AIC	-17	-112	-14	-122	-552	-125
	BIC	284	189	195	87	-429	-2

附表 5、美國五齡組 60-99 歲的模型估計結果 (MAPE、AIC、BIC)

		1970-2009		1980-2009		1990-2009	
		男性	女性	男性	女性	男性	女性
Gompertz	MAPE(%)	2.3	3.5	2.3	3.8	2.6	4.1
	AIC	-1640	-1620	-1231	-1173	-818	-758
	BIC	-1338	-1318	-1022	-965	-695	-635
Coale-Kisker	MAPE(%)	3.2	3.2	3.2	3.0	3.4	2.9
	AIC	-858	-1068	-638	-821	-410	-547
	BIC	-406	-616	-324	-507	-226	-363
DSW	MAPE(%)	6.0	4.9	6.8	4.6	7.9	4.8
	AIC	-1887	-2127	-1387	-1646	-894	-1097
	BIC	-1421	-1661	-1063	-1322	-702	-905
LC	MAPE(%)	3.0	2.4	3.1	2.2	3.2	2.7
	AIC	-1135	-1479	-817	-1054	-523	-655
	BIC	-932	-1276	-664	-901	-418	-550
RH	MAPE(%)	2.6	6.3	2.5	1.9	2.5	1.9
	AIC	-1058	-1140	-787	-1022	-505	-658
	BIC	-655	-737	-485	-719	-299	-452
CBD	MAPE(%)	34.5	48.3	35.9	50.2	37.5	51.7
	AIC	-40	-128	-31	-120	-27	-97
	BIC	262	173	178	89	96	26

附表 6、臺灣 60-99 歲各模型預測結果 MAPE (單位%)

年期	DS1		DS2		LC1		LC2		CBD1		CBD2	
	男	女	男	女	男	女	男	女	男	女	男	女
1980~1984	15.5	9.2	14.7	9.3	13.9	9.9	14.2	10.3	15.0	10.1	12.9	9.6
1981~1985	11.7	11.8	12.5	9.5	12.8	9.1	13.2	10.3	13.4	9.9	12.7	9.3
1982~1986	9.6	8.7	9.8	8.1	11.5	7.9	13.3	8.7	14.2	12.9	13.2	10.8
1983~1987	11.5	10.2	11.3	8.4	11.9	8.9	15.6	10.5	10.9	10.3	11.4	9.0
1984~1988	11.4	9.5	9.8	8.5	10.7	8.3	13.9	10.0	13.6	13.1	14.7	11.9
1985~1989	10.7	9.2	10.4	7.5	11.7	8.8	15.0	9.5	9.7	8.4	10.7	8.4
1986~1990	10.3	9.4	10.4	8.6	10.6	8.1	12.3	8.6	10.8	9.3	11.1	10.4
1987~1991	10.6	10.4	11.0	8.2	10.8	7.6	12.3	8.1	11.8	9.2	11.3	9.0
1988~1992	11.8	9.2	10.1	8.2	10.1	7.7	11.2	8.7	9.7	8.0	9.7	7.6
1989~1993	11.4	11.8	10.8	10.3	9.2	9.0	10.4	9.6	11.9	13.5	11.1	9.6
1990~1994	11.7	10.5	11.5	9.3	9.9	9.1	11.1	9.2	8.0	8.6	8.9	7.9
1991~1995	11.1	8.6	9.0	8.7	9.3	7.4	10.6	7.4	6.5	6.1	7.4	6.0
1992~1996	11.0	9.3	7.9	7.0	7.0	6.3	8.1	6.5	6.2	4.8	7.1	5.0
1993~1997	12.2	11.1	9.1	8.8	6.5	6.3	7.4	6.3	6.3	7.0	6.7	6.1
1994~1998	8.2	8.3	7.7	6.6	5.2	5.6	6.4	6.5	5.0	4.8	7.2	4.5
1995~1999	8.3	9.0	7.8	7.4	4.6	5.5	6.2	6.4	4.8	4.1	6.2	5.0
1996~2000	9.2	9.4	6.6	6.2	4.9	6.3	5.0	5.4	5.4	6.5	4.6	4.4
1997~2001	11.1	8.3	7.2	6.1	6.4	7.0	6.3	6.2	7.0	6.5	5.9	5.2
1998~2002	6.9	7.5	5.5	5.6	6.1	6.2	6.4	6.4	4.2	3.9	5.4	4.1
1999~2003	7.0	6.8	7.2	5.4	7.2	6.8	7.5	6.8	6.2	4.7	7.2	4.4
2000~2004	9.4	9.2	7.6	6.3	7.0	7.7	7.1	7.4	6.5	6.1	7.5	5.8
2001~2005	8.2	6.2	5.7	5.4	6.2	5.5	5.8	4.9	5.3	4.5	5.2	4.0
2002~2006	7.6	6.4	5.4	5.2	5.7	5.2	4.8	4.9	4.5	4.3	4.2	3.9
2003~2007	6.9	6.5	6.2	5.0	5.4	6.0	5.1	5.0	4.3	4.8	4.4	3.6
2004~2008	5.5	7.9	5.5	5.9	5.3	6.6	5.7	5.0	3.5	5.7	4.8	3.9
2005~2009	8.0	7.3	5.0	5.9	5.2	6.3	5.1	5.4	3.5	4.5	3.6	3.5

附表 7、日本 60-99 歲各模型預測結果 MAPE (單位%)

年期	DS1		DS2		LC1		LC2		CBD1		CBD2	
	男	女	男	女	男	女	男	女	男	女	男	女
1980~1984	5.9	5.3	6.6	6.6	3.6	3.9	5.4	5.3	4.3	4.7	5.5	5.7
1981~1985	4.3	3.6	3.7	4.2	4.5	5.7	3.0	3.6	8.1	9.2	5.2	6.1
1982~1986	4.0	3.8	4.4	3.8	3.8	5.3	3.7	3.1	6.7	8.7	4.8	5.5
1983~1987	4.7	4.8	5.2	5.0	2.9	2.9	4.2	3.3	4.3	5.1	4.5	5.2
1984~1988	3.4	3.6	3.5	3.4	3.4	4.3	3.5	2.9	6.1	7.1	5.2	6.1
1985~1989	4.5	3.5	3.3	3.5	3.3	3.9	3.4	3.2	5.3	6.1	5.5	6.1
1986~1990	4.1	4.6	4.4	4.0	3.8	4.3	4.0	3.0	5.8	6.2	5.4	5.6
1987~1991	6.8	5.5	5.6	5.6	3.9	3.4	5.3	4.3	5.4	5.9	6.3	6.5
1988~1992	6.9	7.1	7.2	7.6	5.0	3.7	6.7	5.9	6.0	6.0	7.2	7.4
1989~1993	4.2	4.3	4.4	4.8	3.1	4.0	4.5	3.4	6.7	7.7	6.6	6.8
1990~1994	6.0	6.6	5.6	6.4	4.2	3.1	5.7	4.9	5.8	5.9	6.8	7.3
1991~1995	4.9	4.4	4.1	5.1	3.1	3.4	4.4	3.9	5.8	7.0	6.2	7.0
1992~1996	4.2	5.4	3.9	5.1	3.3	3.8	4.1	4.7	5.5	7.0	5.7	7.2
1993~1997	3.9	4.6	3.8	4.4	3.1	4.4	3.5	4.6	5.1	7.3	5.7	7.8
1994~1998	4.6	4.2	4.2	4.0	3.9	5.8	3.4	4.3	5.5	9.1	4.7	7.9
1995~1999	4.5	4.5	3.9	4.0	3.8	4.1	3.9	4.0	4.2	7.8	4.5	7.9
1996~2000	5.0	3.7	4.1	3.3	7.4	7.6	6.3	4.8	7.5	10.4	5.8	7.9
1997~2001	5.1	4.0	3.8	3.4	5.5	3.9	5.6	3.3	3.6	6.8	3.8	6.5
1998~2002	5.1	4.5	3.8	4.2	5.7	4.0	5.3	3.4	3.6	6.7	3.2	6.4
1999~2003	6.0	4.7	5.2	4.3	5.8	4.4	4.8	3.4	4.1	6.7	3.4	6.6
2000~2004	8.5	5.8	6.2	4.3	8.8	8.1	6.4	4.5	7.2	9.5	4.9	6.9
2001~2005	5.4	6.5	4.3	6.4	4.5	3.9	4.0	4.2	3.5	6.6	3.6	8.0
2002~2006	4.4	5.6	4.5	6.1	3.7	3.4	4.1	3.9	3.3	7.0	3.6	8.1
2003~2007	5.9	7.8	4.9	6.1	3.7	3.9	4.4	4.9	3.6	7.7	4.3	9.1
2004~2008	4.3	5.9	4.7	6.2	3.9	3.6	4.8	4.8	3.5	7.3	4.3	8.9
2005~2009	7.7	9.6	6.1	8.6	4.1	4.1	5.4	6.1	4.1	8.1	5.2	9.9

附表 8、美國 60-99 歲各模型預測結果 MAPE (單位%)

年期	DS1		DS2		LC1		LC2		CBD1		CBD2	
	男	女	男	女	男	女	男	女	男	女	男	女
1980~1984	4.8	8.1	6.1	9.2	3.3	4.4	5.1	7.8	2.8	6.7	5.3	10.3
1981~1985	3.5	4.3	3.8	5.7	3.0	2.9	3.6	5.3	2.2	5.2	3.4	7.5
1982~1986	3.9	5.3	4.6	5.7	3.1	4.1	3.8	5.2	2.7	6.3	3.6	7.4
1983~1987	4.1	4.9	4.3	5.2	3.3	4.8	3.5	4.7	3.2	7.2	3.2	6.9
1984~1988	3.5	4.3	3.4	4.0	2.1	3.0	2.6	3.5	1.9	5.9	2.5	6.3
1985~1989	3.0	2.9	2.5	2.6	1.9	2.2	2.1	2.3	1.9	5.4	2.2	5.3
1986~1990	3.5	3.3	2.3	2.4	2.5	2.0	2.3	2.3	2.8	5.0	2.6	5.4
1987~1991	4.3	3.5	3.0	2.9	3.0	2.4	2.8	2.7	3.1	5.1	3.3	5.2
1988~1992	3.3	3.7	3.8	3.6	3.5	3.0	3.6	3.4	3.3	5.3	4.0	5.6
1989~1993	5.2	4.9	4.9	4.6	4.5	4.5	4.2	4.3	5.1	6.5	4.9	6.6
1990~1994	2.6	3.2	2.7	3.0	3.1	2.9	3.0	3.0	2.6	5.3	2.9	5.5
1991~1995	2.6	2.4	2.2	2.1	2.4	2.3	2.2	2.3	2.6	5.6	2.8	5.5
1992~1996	3.3	2.8	2.7	3.2	2.3	2.6	2.3	3.2	2.9	5.9	3.7	6.5
1993~1997	3.4	4.5	3.7	5.0	2.5	3.8	3.1	4.9	3.9	7.1	5.0	8.0
1994~1998	2.9	2.5	2.3	3.1	2.7	2.3	2.3	3.0	2.8	5.5	3.6	6.4
1995~1999	3.0	3.6	2.8	4.2	2.5	3.0	2.6	4.0	3.2	6.1	4.2	7.2
1996~2000	3.0	3.3	2.2	3.1	2.6	3.4	2.4	3.6	3.2	6.0	3.6	6.5
1997~2001	3.0	2.7	2.1	2.5	2.8	4.0	2.5	4.1	3.3	6.1	3.5	6.1
1998~2002	3.1	3.6	2.2	2.1	2.7	4.6	2.7	4.5	3.7	6.5	3.5	6.0
1999~2003	3.4	3.2	2.4	2.5	3.1	2.7	2.7	2.5	4.0	6.2	4.2	6.2
2000~2004	4.6	5.1	3.5	3.7	4.6	4.4	3.8	4.6	5.0	6.7	4.9	6.9
2001~2005	4.0	5.6	3.6	4.1	4.4	5.4	3.6	5.5	5.5	7.2	5.5	7.5
2002~2006	4.4	6.0	4.0	4.9	4.9	6.5	4.3	6.5	6.1	8.0	6.1	8.2
2003~2007	5.5	6.9	5.1	6.5	8.3	9.4	7.6	9.4	6.9	8.5	7.1	9.6
2004~2008	5.4	6.4	4.9	7.3	6.9	8.2	6.5	8.1	6.8	8.6	7.0	9.8
2005~2009	3.3	4.4	3.5	4.4	5.0	5.7	4.9	5.8	6.2	7.4	6.4	8.2