

日本與新加坡的高年齡死亡率 是否符合 Gompertz 函數

余清祥^{*} 陳仁泓^{**}

摘要

日本與新加坡的高年齡死亡率是否符合 Gompertz 函數？本文以日本與新加坡西元 1980~1990 年單一年齡高齡男性死亡率資料為依據，以 Whittaker、Bayesian、Kernel 三種方法修勻高齡死亡率，找出較佳的修勻曲線之後，再使用拔靴法(Bootstrap)模擬死亡率的變異數，檢定日本與新加坡高齡男性的死亡率是否符合 Gompertz 函數的假設，作為未來台灣編製高年齡生命表的參考。

關鍵詞：修勻；Gompertz 函數；死亡率；Bootstrap 法；人口老化

1. 緒 論

在醫療科技快速進步、經濟及環境等生活條件日趨改善下，人口老化成為今日世界許多國家的共同現象。根據聯合國的長期人口推估報告(1992)，1990 年全世界 65 歲以上的老人人口有 3.3 億人左右，約佔總人口 53 億的 6.2% (其中 80 歲以上者佔了約 1.0%)；預計在西元 2025 年時，65 歲以上的人口將增加為總人口的 9.7% (80 歲以上者 1.6%)；在西元 2050 年時 65 歲以上的人口則增為 14.0% (80 歲以上者 3.0%)；其中老人人口成長最快的將是亞洲地區，佔其中的一半。

在各國面臨人口老化問題的今日，台灣目前的情形雖不似已開發國家般嚴重，但自 1993 年起台灣亦開始邁入高齡化社會(也就是說 65 歲以上人口佔 7% 以上)，在六年的時間內，65 歲以上人口於 1999 年年底已增至 8.3%

* 余清祥：國立政治大學統計系副教授。

** 陳仁泓：國立政治大學風險管理與保險研究所研究生。

(參閱民國八十八年臺閩地區人口統計)，平均每年的增幅約為 0.2%，人口老化速度居世界之冠。根據行政院經濟建設委員會人力規劃處的中推計(1999)，預計到了西元 2025 年，65 歲以上人口比例將增為 16.6%，已遠超過全世界平均的 9.7%；2050 年時更高達 24.0%，為全世界平均 14.0 % 的 1.7 倍左右。

與 65 歲以上人口比例的增加類似，平均壽命也因科技進步而獲得延長，以臺灣光復至今的資料為例，其中男性(女性)的平均壽命由西元 1951 年的 53.10 歲(57.32 歲)增至西元 1970 年的 66.66 歲(71.50 歲)，再增至 1999 年的 72.34 歲(78.05 歲)。老年人口比例的增加再加上平均壽命的延長，將使未來的老年問題更為凸顯，包括個人的(退休)生涯規劃及政府的社會福利措施等議題，將是我國人在下一世紀必須正視的問題。其中高齡人口的特性因人口快速老化，因過去經驗不足而缺乏較完整的資訊，以死亡率為例，過去大多認為高齡死亡率為 Gompertz 函數，然而近年來蒐集已開發國家的資料顯示 Gompertz 假設頗有可議之處(Kannisto, 1996)，有明顯高估的傾向，可能會低估老年問題所帶來的衝擊與影響。

本文以日本與新加坡 1980 至 1990 年的高齡男性死亡率資料為基礎，配合死亡率修勻與統計模擬等方法，除了驗證高齡死亡率是否符合 Gompertz 假設外，同時也探討修勻高年齡死亡率需注意的事項，以作為台灣未來編製高年齡生命表的參考。

2. 資料來源修勻分析

本文採用的資料為西元 1980~1990 觀察年度男性單一年齡的死亡資料，其中日本為 80 歲到 109 歲，新加坡則為 80 歲至 100 歲(詳見附表一)¹。因為高年齡死亡率的曝露數(Exposure)在較高年齡時有不足的傾向，例如：日本的資料在 98 歲時已不滿 10,000 人，新加坡則在 90 歲時不滿 1,000 人，為避免死亡率受到人數過少而引起劇烈震盪，本研究使用較常用的修勻方法，如 Whittaker、Bayesian、Kernel 估計法修勻高年齡死亡率，找出較佳

¹ 資料來源：Vaino Kannisto, “The advancing frontier of survival”一書中，觀察年份西元 1980~1990 年日本及新加坡男性的粗死亡率，日本為 Good quality data，新加坡為 Acceptable quality data，其中新加坡的人口數太少，因此只修勻到一百歲。

的修勻曲線，再判斷日本與新加坡男性死亡率是否滿足 Gompertz 函數的假設。

常用的修勻方法多採 Miller(1946)的主張，用適度性(Fit)及平滑性(Smoothness)作為修勻的依據，其中適度性反映修勻值與原始資料值的相差程度，平滑性則反映修勻值間平滑與連續的特性。以下分別說明本文使用的三種修勻方法之原理及操作方式。

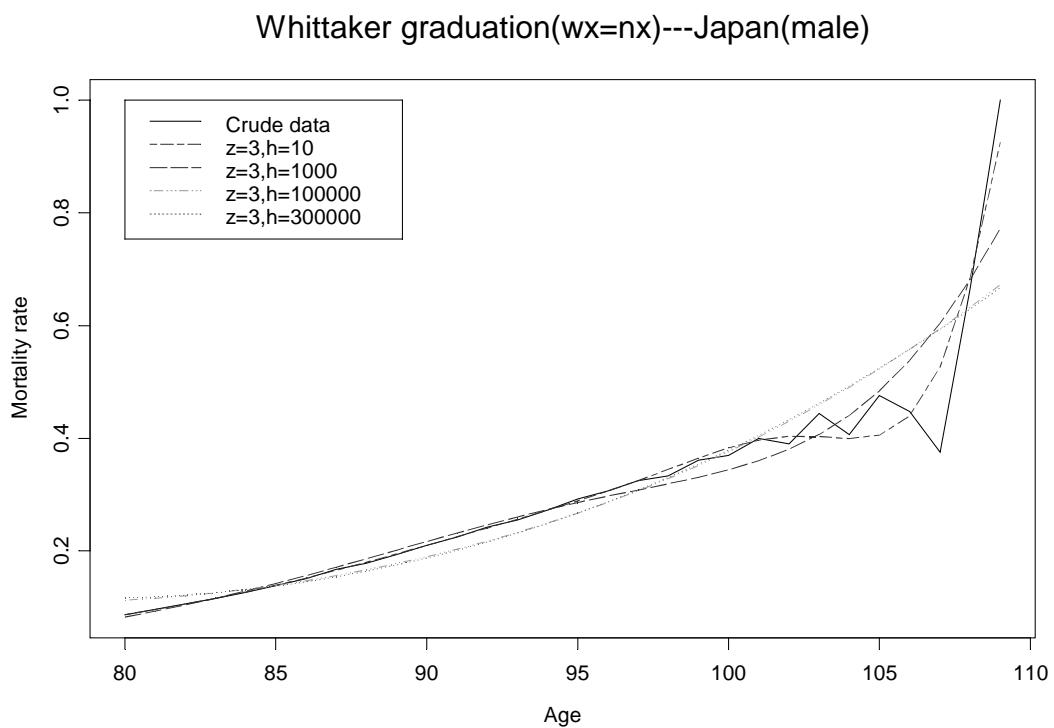
一、Whittaker 修勻法

本法同時考慮適度性及平滑性，將兩者以線性組合的方式合併，其形式為 $M = F + hS$ ，其中 F 表適度性(通常選取 $F = \sum_{x=1}^n w_x (v_x - u_x)^2$ 為適度性函數)， S 表平滑性(通常選取 $S = \sum_{x=1}^{n-z} (\Delta^z v_x)^2$ 為平滑性函數)，加權數 w_x 通常以曝露數 n_x 帶入， h 為非負實數， u_x 表原始資料值， v_x 表修勻值， Δ 表差分(Difference)²，藉由使目標函數 M 最小化來求得最佳修勻值。一般在修勻參數的選擇上，在 $z = 3$ 時為最有效率³(Efficient)； h 的選取決定適度性與平滑性的比重， h 越小表示修勻值越接近原始值， h 越大表示越重視平滑性的影響，較合理的考量是選取與曝露數(n_x)相當的數值，但由於高年齡曝露數相差過大(以日本為例，80 歲的曝露數為 1,488,902 人，而 100 歲以後的曝露數在 2,300 人以下，曝露數平均值為 280,000)，修勻時勢必產生前後不均衡的現象。(新加坡平均曝露數為 2,300，也有類似的問題。)為求較合適的參數值，日本部份嘗試 4 種不同的 h 值： $h = 10$ 、 $1,000$ 、 $100,000$ 、 $300,000$ (與平均曝露數相近)。日本(見下圖一)在 $h = 10$ 時，修勻後的死亡率在 102 歲後產生遞降的趨勢，與一般死亡率遞增的認知不合，因此不考慮 $h = 10$ ； h 在大於 $1,000$ 後大致滿足死亡率遞增的要求，其中選 $h = 100,000$ 與 $h = 300,000$ 有較平滑的效果，且 $h = 100,000$ 與 $h = 300,000$ 的修勻值幾乎重疊，所以日本的 Whittaker 修勻值取 $z = 3$ ， $h = 100,000$ 。新加坡(見下圖二)部份 $h = 10$ 、 2000 、 5000 (與平均曝露數相近)，較佳的選擇為 $z = 3$ ， $h = 2000$ 。Whittaker 法的修勻結果見附表二。

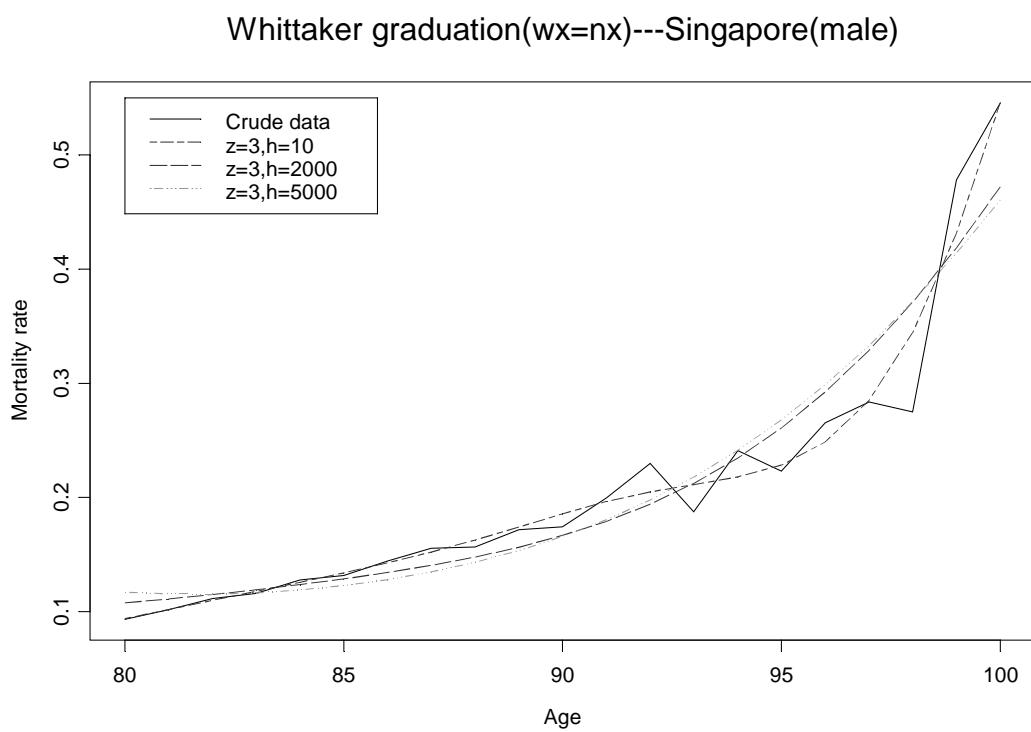
² 差分運算子(Difference operator, Δ)又稱為前進差分運算子(Forward difference operator), 其定義為 $\Delta f(x) = f(x+1) - f(x)$ 。

³ Borgani(1979)提出 R_z -efficiency 為比較標準時，發現 $z=3$ 時，是平滑性下的最佳選擇。

圖一、(日本男性之 Whittaker 修匀值與原始死亡率的比較)



圖二、(新加坡男性之 Whittaker 修匀值與原始死亡率的比較)



二、Bayesian 修勻法

貝氏方法為將過去的經驗或實驗結果作為過去資訊(Prior information)，結合現在實驗或觀察所得的資料(Data)，綜合分析後得到的結果(Posterior)，即過去資料 + 現在資料 → 更新的結果。以生命表的修勻為例，參考過去的生命表，加上現有的死亡率資料，整理出與過去經驗相關的生命表。假設原始值 u_x 服從多變量常態分配，即

$$\tilde{u} | \tilde{t} \sim N_n(\tilde{t}, B) \Leftrightarrow f(\tilde{u} | \tilde{t}) = k_1 \exp[-(\tilde{u} - \tilde{t})' B^{-1} (\tilde{u} - \tilde{t}) / 2] .$$

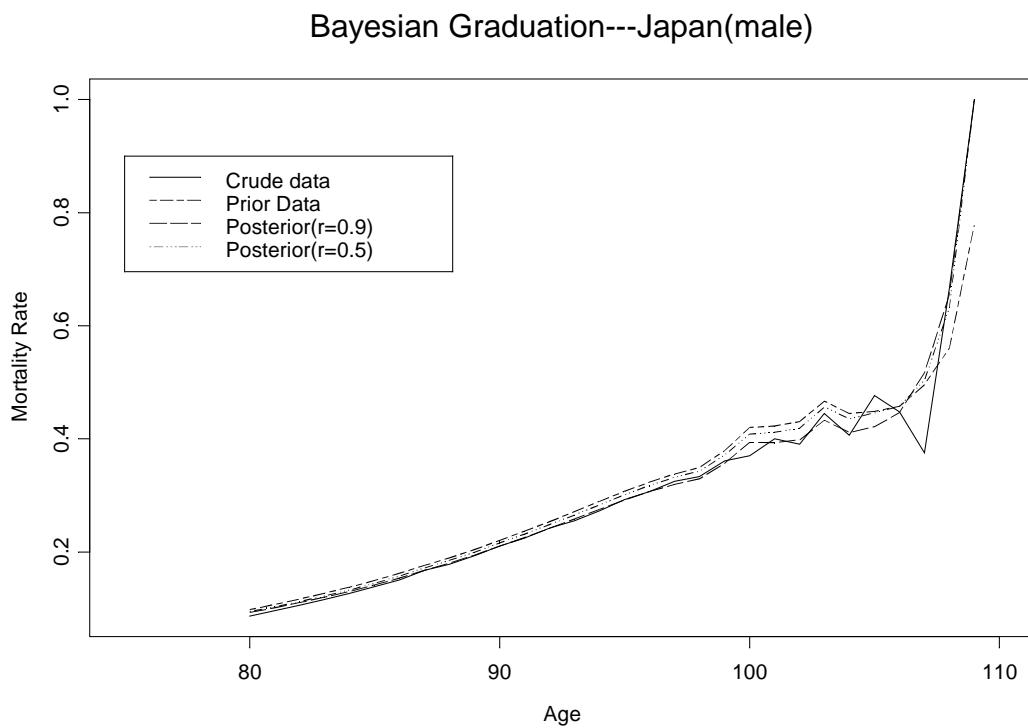
其中 \tilde{t} 為真實值，代表過去的資訊，通常假設 \tilde{t} 滿足 $N_n(\tilde{m}, A)$ 的分配， \tilde{m} 為經驗值， $A_{n \times n}$ 是 \tilde{t} 的共變異數矩陣(Covariance matrix)； $B_{n \times n}$ 是 u_x 的共變異數矩陣，代表現在的資訊， k_1 則為一常數，滿足 $k_1 = [(2\pi)^n |B|]^{-1/2}$ 。

現在資訊的參數 $B_{n \times n}$ 直接來自死亡率的觀察值，因為死亡與否可視為二項分配，因此 $B_{xx} = \text{Var}(u_x) = u_x(1-u_x)/n_x$ 。關於過去資訊的參數選取，在 \tilde{m} 方面大多為在搜集原始值 \tilde{u} 前最有可能的數值，例如 \tilde{m} 可選最近一次生命表的數值作為死亡率的預估值。為求計算的簡化， $A_{n \times n}$ 的選取為假設 $A_{xy} = p_x p_y r^{|x-y|}$ ， $p_x > 0$ ， $p_y > 0$ ， $0 \leq r < 1$ ，本文中令 $r = 0.9$ 及 $r = 0.5$ 。其中 m_x 與 p_x 的選取與 B_{xx} 類似，為 Kannisto 書中蒐集的十三國死亡資料合成所編成的十三國生命表。其中日本部份經驗值 m_x 的 80 歲曝露數為 6,171,300 人，遠大於原始值的 80 歲曝露數 (1,488,902 人)，所以矩陣 A 相對於 B 而言較小⁴，修勻值會偏向過去經驗值；新加坡的部份亦相同。但偏向經驗值可能產生問題：日本(見下圖三)在 104、105 歲的修勻值小於 103 歲的修勻值，違反一般人「年齡愈大死亡率愈高」的認知(其原因為十三國生命表中的死亡率曲線不符合年齡愈大死亡率愈高，加上原始值也違反此認知，而 Bayesian 修勻法是兩者綜合出來的結果，所以其修勻結果自然也違反此認知)。

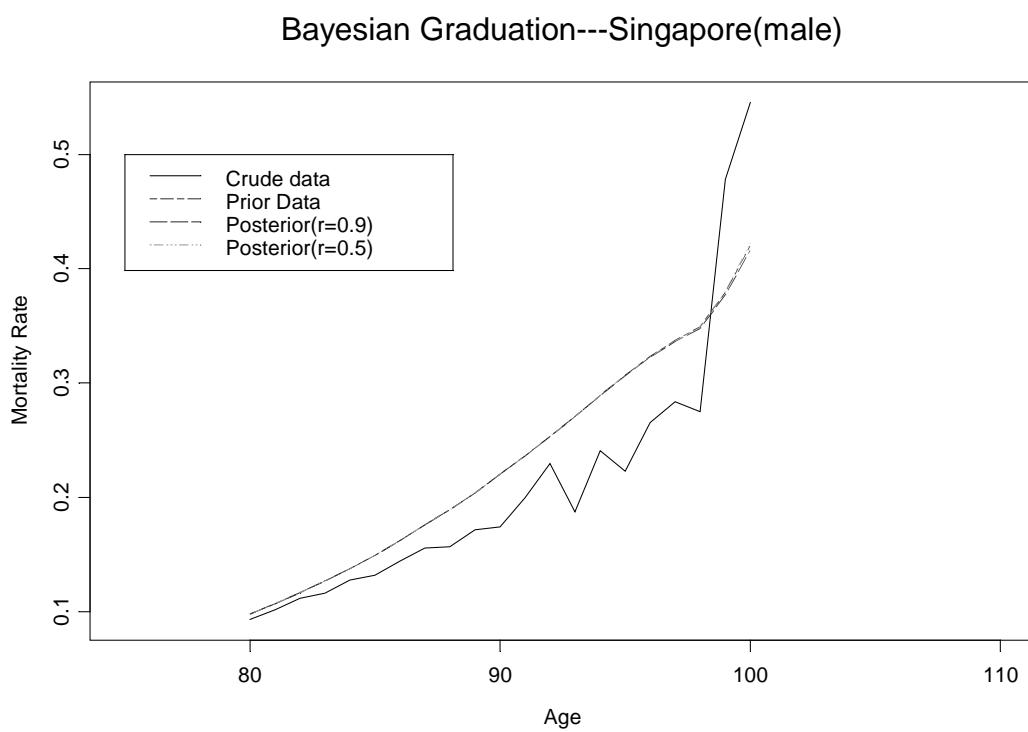
新加坡男性死亡率的修勻結果見圖四， $r = 0.5$ 及 $r = 0.9$ 的結果都與經驗值曲線幾乎重疊，與日本的修勻結果有一樣的問題。因此，日本及新加坡男性的死亡率 Bayesian 修勻值將偏向過去的經驗，不符合死亡率平滑及隨年齡遞增的認知。

⁴ 因為 $A_{xy} = p_x p_y r^{|x-y|}$ ， $p_x = m_x(1-m_x)/N_x$ ，其中 N_x 为曝露數。

圖三、(日本男性之 Bayesian 修勻值與原始死亡率的比較)



圖四、(新加坡男性之 Bayesian 修勻值與原始死亡率的比較)



三、核 (Kernel) 修勻法

核估計法屬於統計學中的無母數法，藉由觀察值及核函數的作用，估計觀察值的密度函數(Density function)。若 $f(x)$ 為 X 的密度函數，則 f 的核

估計值 $\hat{f} = \frac{1}{nh} \sum_{i=1}^n k\left(\frac{x-x_i}{h}\right)$ ，其中核函數 $k(x)$ 需滿足 $\int_{-\infty}^{\infty} k(x) = 1$ ，通常假設為

常態分配 $N(k_N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2})$ 或 Laplace 函數 $L(k_L(x) = \frac{1}{2} e^{-|x|})$ ，因核估計法

中核函數的影響較不顯著，本文採用常態核函數。在精算上之死亡率核估計修勻主要類型有二：一是對死亡率原始估計值作平均，其缺點為不能反映每個估計值的資料數量，幾個極端值(Outlier)可能改變全體死亡率的修勻結果，因此本文不採用此方法；第二種類型是使用各年紀的曝露數(e_x)與死亡數(d_x)作加權平均，修勻公式如下：

$$\hat{q}_x = \frac{\sum_{i=1}^n d_i k\left(\frac{x-x_i}{h}\right)}{\sum_{i=1}^n e_i k\left(\frac{x-x_i}{h}\right)}$$

其中 \hat{q}_i 為死亡率 q_i 的原始估計值， h 稱為環寬(Bandwidth)，代表修勻時考慮的範圍。若 h 值較小時，則僅有接近 x 點的 x_i 值對 $\hat{f}(x)$ 有較大的影響；若 h 值較大時，則有較多的 x_i 值對 $\hat{f}(x)$ 有影響； h 也扮演與 Whittaker 修勻法中目標函數 $F + hS$ 中 h 同樣的角色，在此假設 $h = 1, 2, 3$ 。

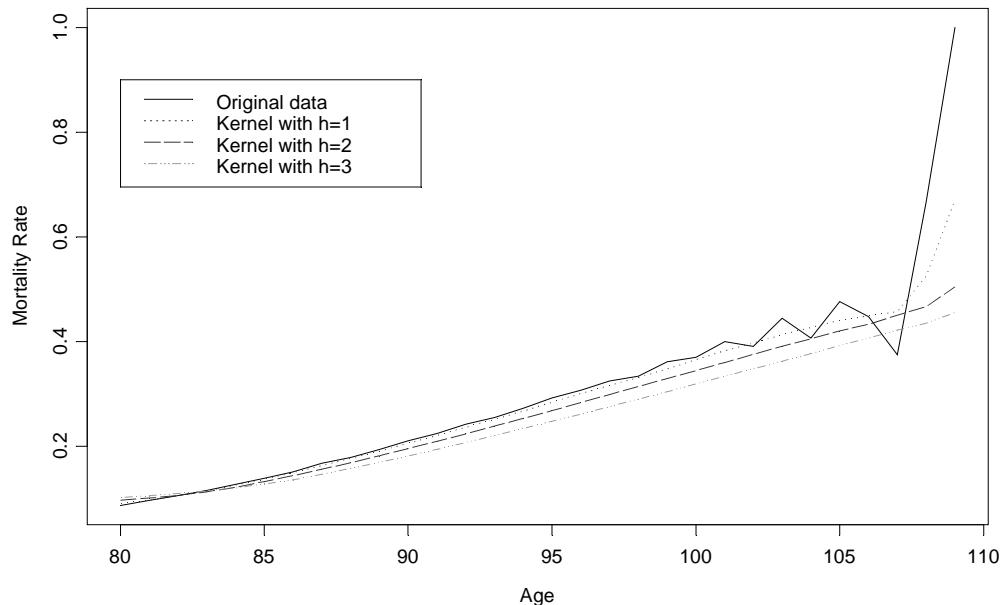
日本(見下圖五)的男性死亡率隨著 h 值增加，修勻曲線的平滑度也增加，但修勻後死亡率則隨著年齡增加而向下移動，本文的主題在檢定高年齡的死亡率是否符合 Gompertz 函數，所以選取較佳修勻值的標準為儘量接近原始值但又不失平滑性的情況下，所以選取 $h=1$ 為日本的核修勻值。新加坡男性(見下圖六)，也是選 $h=1$ 。使用 Kernel 法的修勻結果見附表二。以日本為例，與 Whittaker 修勻值比較，除了在 107~109 歲的修勻值有較大的不同之外，其結果大致相同；這是因為核修勻法所考慮前後幾項加權平均的項數較 Whittaker 修勻法多⁵，所以在 107~109 歲的修勻值相對於

⁵ Whittaker 修勻法的 h 值越大表示更重視平滑性的影響，而 h 值越小即表示增加前後幾項加權平均的項數，在本文以日本為例取 $h=100000$ 為較佳的 Whittaker 修勻值，不易受極端值(極低及最高年齡)的影響。比較圖一及圖二中，可以發現 h 值越大時，其修勻曲線越平滑，這是因為 h 值越大表示前後幾項加權平均的項數增加，所以較不容易受極端值(本文為最高年齡的落差較大)的影響，而增加其平滑性。

Whittaker 修勻法穩定。所以若要達到 107~109 歲的修勻值的穩定程度，即等同於要求增加平滑性，Whittaker 及核修勻法者都可以增加 h 值來完成目標，但會犧牲適度性，其間的取捨視決策者的考慮而定。

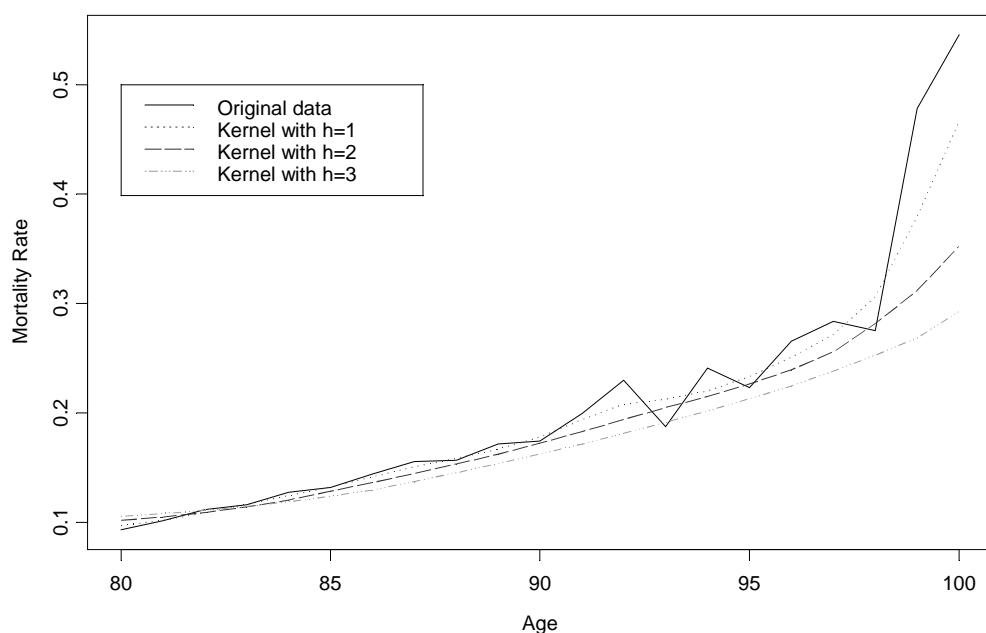
圖五、(日本男性之核修勻值與原始死亡率的比較)

Kernel graduation using Normal function---Japan(male)



圖六、(新加坡男性之核修勻值與原始死亡率的比較)

Kernel graduation using Normal function---Singapore(male)



4. Gompertz 函數的檢驗

本節檢驗日本與新加坡高齡男性的瞬間死亡率（又稱為死力；Force of mortality） μ_x 是否為 Gompertz 函數。假設瞬間死亡率 μ_x 滿足 Gompertz 函數，即 $\mu_x = BC^x$ ， $B > 0$ ， $C > 1$ ，因為

$$p_x = \exp[-\int \mu_{x+t} dt] = \exp[-\frac{1}{\ln C} BC^x (C - 1)] ,$$

兩邊取自然對數可得 $\frac{\ln p_{x+1}}{\ln p_x} = C$ 。因此假若 μ_x 為 Gompertz 函數，則 $\ln p_x$ 與

$\ln p_{x+1}$ 的比值應該接近定值。以下分別以圖形表示與拔靴法(Bootstrap)探討 $\ln p_x$ 與 $\ln p_{x+1}$ 的比值關係，因在前一節中 Whittaker 修勻法的結果較合乎我們的要求，以下拔靴法中修勻的部份僅以 Whittaker 修勻法為代表。

一、圖示法

下圖七及圖八分別為日本及新加坡原始死亡率及 Whittaker、Bayesian、Kernel 法的修勻值所求出的 $\ln p_x$ 與 $\ln p_{x+1}$ 比值，大體而言， $\frac{\ln p_{x+1}}{\ln p_x}$ 比值在較低年齡時較接近定值。

● 日本(圖七)

1、原始死亡率的 $\frac{\ln p_{x+1}}{\ln p_x}$ 比值在 80~97 歲相當接近一固定比值，97 歲後

因曝露數不足而產生上下震盪的現象，也就是說日本男性瞬間死亡率 μ_x 在 97 歲以前較符合 Gompertz 函數的假設，與筆者之前對瑞士高齡死亡率的結果類似⁶。

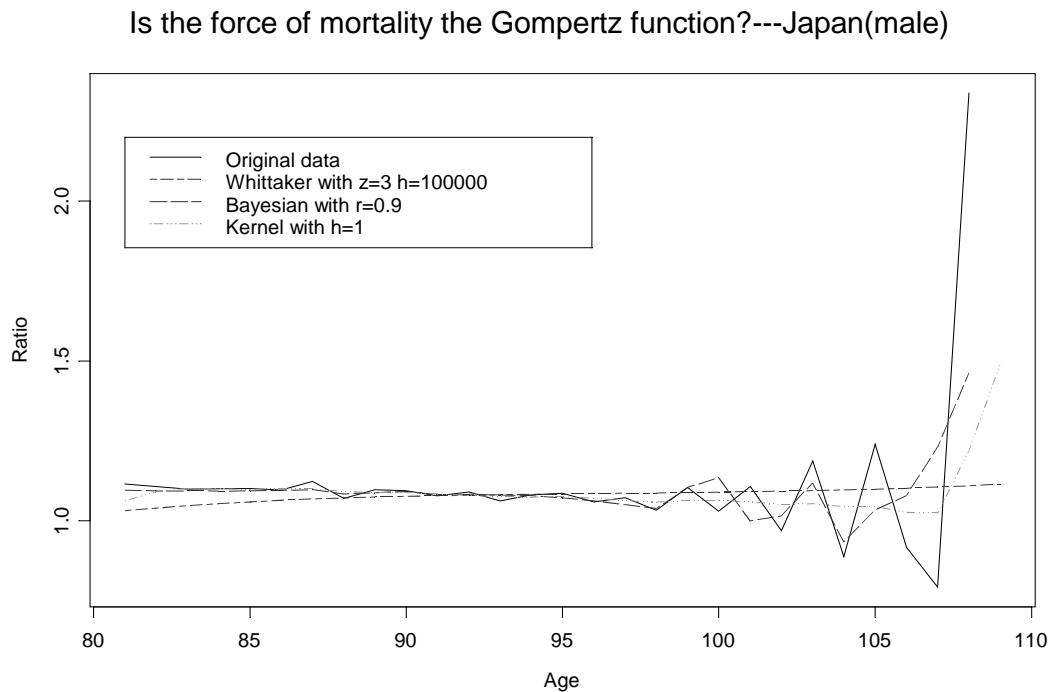
2、Whittaker 修勻得出的 $\frac{\ln p_{x+1}}{\ln p_x}$ 比值較原始死亡率更接近固定比值。

3、Bayesian 修勻的 $\frac{\ln p_{x+1}}{\ln p_x}$ 比值與原始死亡率相同，在 80~97 歲接近固定比值，97 歲以後開始變化。

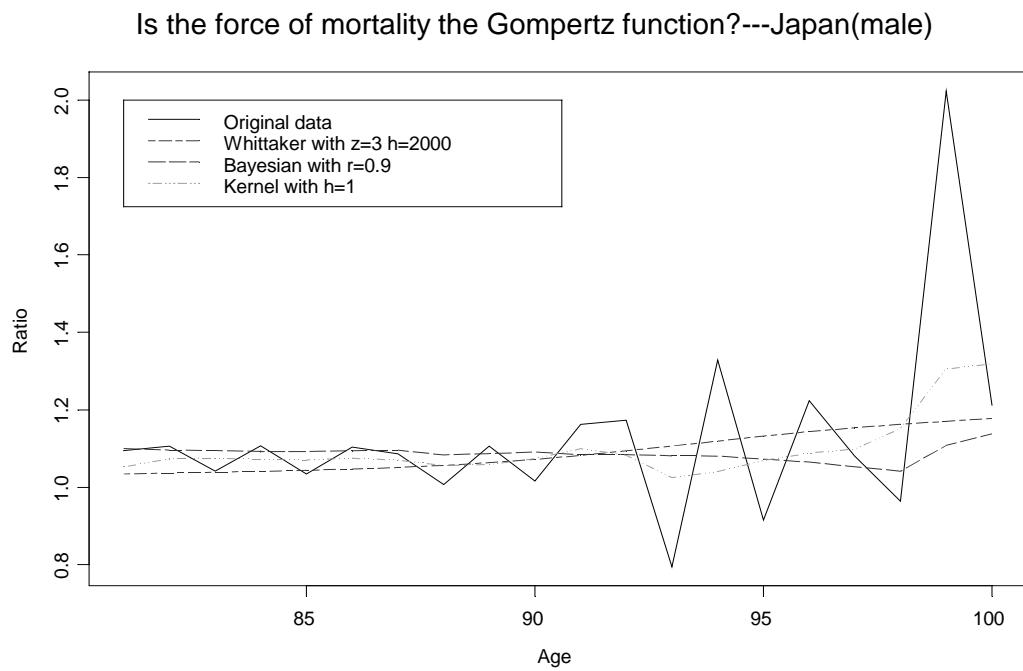
⁶ 之前的研究結論為：瑞士西元 1980~1990 年單一年齡男性與女性高齡死亡率的原始死亡率 μ_x 在 80~96 歲符合 Gompertz 函數，96 歲以後就不符合 Gompertz 函數，其參考值 96 歲與本文日本男性原始值的參考值 97 歲極為接近。

4、核修勻的 $\frac{\ln p_{x+1}}{\ln p_x}$ 比值也在 80~97 歲接近固定比值，但 97 歲後的上下震盪現象較為穩定。

圖七(日本原始死亡率及 Whittaker、Bayesian、核修勻值的比值)



圖八(新加坡原始死亡率及 Whittaker、Bayesian、核修勻值的比值)



● 新加坡(圖八)

- 1、原始死亡率的 $\frac{\ln p_{x+1}}{\ln p_x}$ 比值在 80~95 歲較平緩，但不接近固定比值(變動情形較日本大)，95 歲以後開始變化。
- 2、Whittaker 修勻值在 80~96 歲較接近固定比值，但其比值呈現緩慢上升的趨勢，必須進一步檢定其顯著性。
- 3、Bayesian 修勻值在 80~97 歲接近固定比值。
- 4、核修勻值在 80~93 歲接近固定比值，93 歲以後開始變化。

二、Bootstrap 法

使用圖形表示只能作為初步判斷，接下來使用蒙地卡羅法(Monte Carlo method)中的拔靴法模擬出 $\frac{\ln p_{x+1}}{\ln p_x}$ 比值的變異數，以統計檢定的方式判斷日本與新加坡的高齡男性死亡率是否滿足 Gompertz 函數的假設。拔靴法由 Efron (1982)提出，基本想法是將已有的觀察值當作是母體(Population)而對其重複抽樣(Resampling)，以求取因資料不足而無法估計的變異數。我們可用於檢定 $\frac{\ln p_{x+1}}{\ln p_x}$ 是否符合某一固定常數，即以原始死亡率的 Gompertz 函數比值為中間值，上下界等於中間值加減兩倍標準差(藉由模擬抽樣得出)，若存在一直線平行橫座標通過上下界的中間區域且不超出上下界的中間區域，則在 95% 的信賴水準⁷下，我們不拒絕瞬間死亡率 μ_x 是 Gompertz 函數的假設。以下分別對原始死亡率修勻值進行討論。

1、以原始死亡率進行拔靴法：

先以日本及新加坡觀察到的死亡率資料為基礎，假設死亡人數服從二項分配⁸，模擬抽樣一千次，計算每次的 $\frac{\ln p_{x+1}}{\ln p_x}$ 比值，再求出比值的變異數。

由圖九中的模擬結果可看出存在一直線大致通過上下界的中間區域，(除了在 87 歲有些偏離外)，表示日本男性的瞬間死亡率 μ_x 符合 Gompertz 函數，與圖示法(圖五中 Whittaker 法)結果不同⁹。而新加坡(見圖十)可明顯

⁷ 在每分配中平均加上或減兩倍標準差約等於 95.45%。

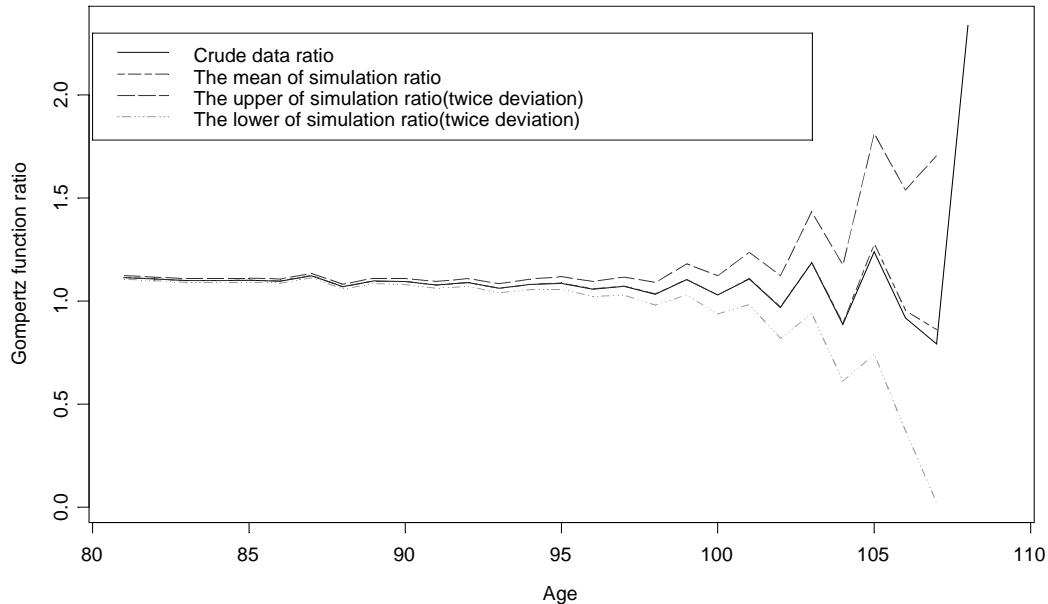
⁸ 死亡人數 $d_x \sim b(n_x, q_x)$ ，其中 b 表二項分配， n_x 表 x 歲的曝露數， q_x 表 x 歲的死亡率。

⁹ 無因於模擬的特性：圖九及圖十可以看出她前面年齡的信賴區間縮小(前面年齡的曝露數大)，她後面年齡的信賴區間擴大(後面年齡的曝露數少)，所以在最後幾個年齡不拒絕 μ_x 符合

看出存在一直線平行橫座標通過上下界的中間區域，表示新加坡男性的瞬間死亡率 μ_x 符合 Gompertz 函數，也與圖示法(圖六 Whittaker 法)結果不同¹⁰。

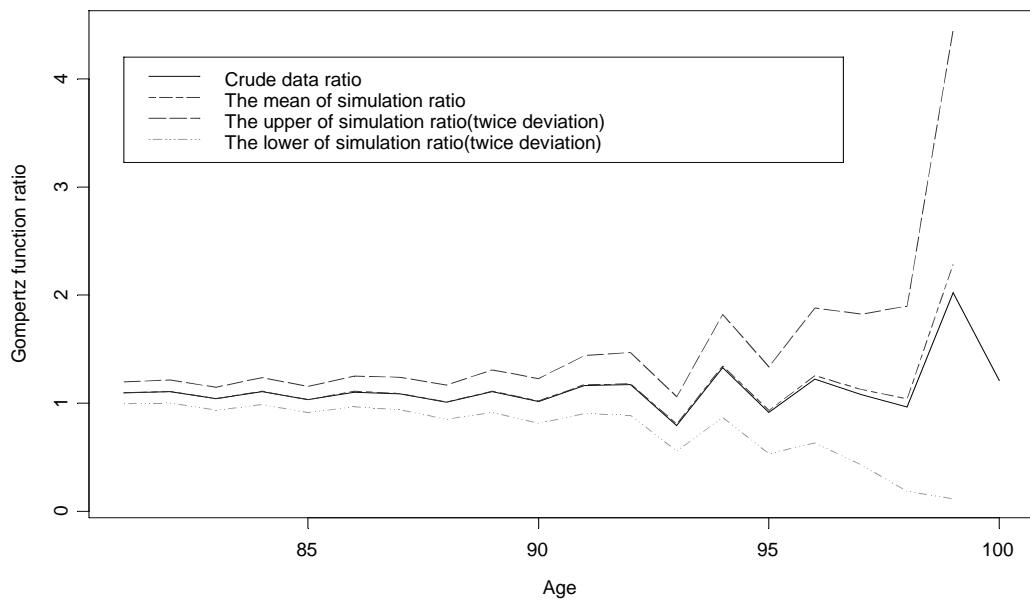
圖九(日本男性死亡率 Gompertz 函數比值的上下界)

The upper and lower bound of Gompertz function ratio---Japan(male)



圖十(新加坡男性死亡率 Gompertz 函數比值的上下界)

The upper and lower bound of Gompertz function ratio---Singapore(male)



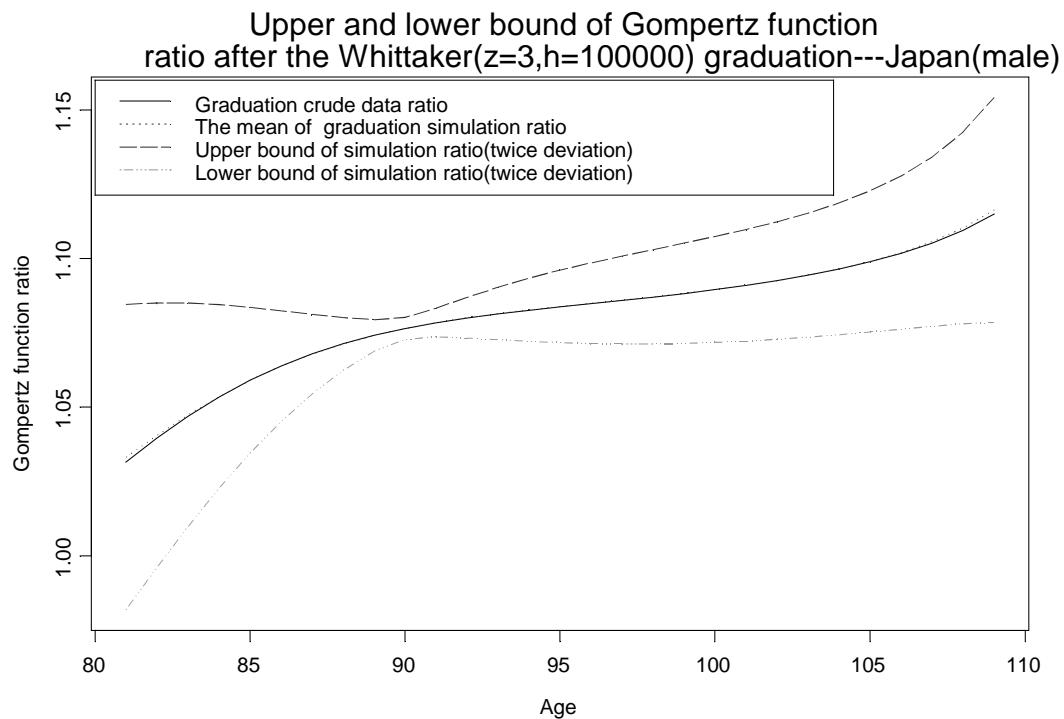
Gompertz函數，與圖示法的結果(關於原點死亡率 Gompertz函數比值)不同。
¹⁰除了模擬的特性外加上真實數(80 歲有 10,468 人)遠小於日本(80 歲有 1,488,902 人)，所以其模擬的估幅區間更大，故與圖示法結果(關於原點死亡率 Gompertz函數比值)不同。

2、以修勻值進行拔靴法：

同樣以日本及新加坡的死亡率資料為母體，假設死亡人數服從二項分配，模擬抽樣一千次，每次的模擬結果再以 Whittaker 法修勻，然後再計算 $\frac{\ln p_{x+1}}{\ln p_x}$ 比值，求出比值的變異數。由圖十一(日本)及圖十二(新加坡)可

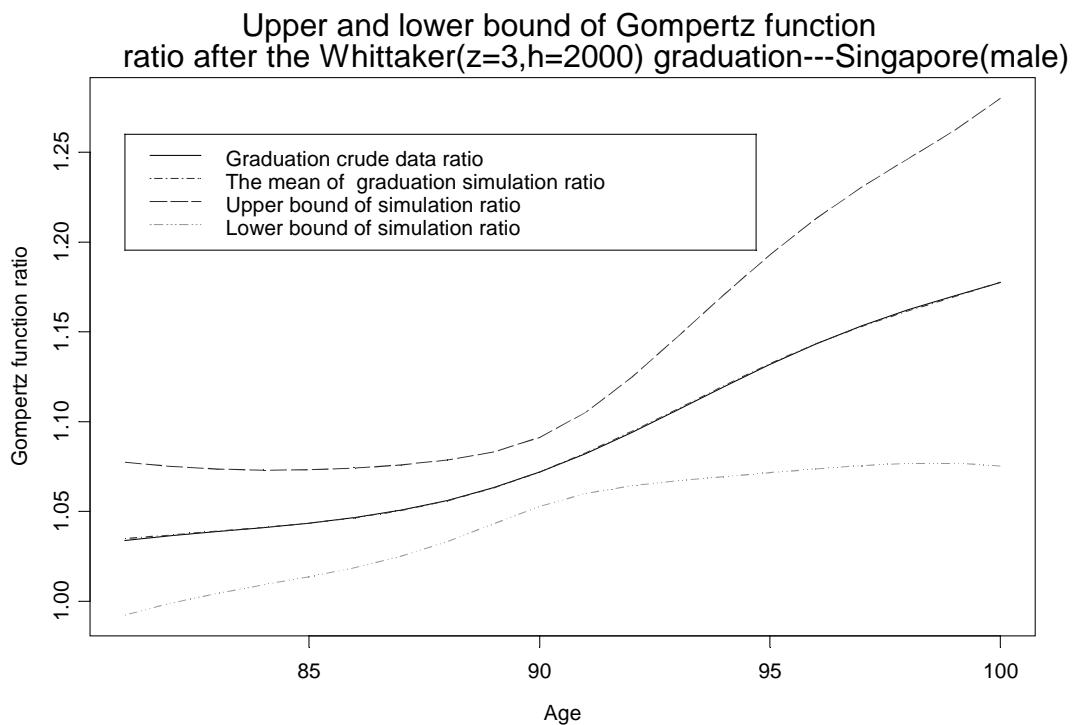
看出皆存在一平行直線通過上下界的中間區域，表示日本及新加坡男性的瞬間死亡率 μ_x 符合 Gompertz 函數，與 1 之結論相同。圖十一及圖十二的縱座標(Gompertz 函數比值)比例小於圖九及圖十之縱座標比例，可見採用修勻可減少因曝露數差異而造成標準差過大的現象¹¹ (亦可由圖七及圖八的曲線震盪得到佐證)，因此原始死亡率的 $\frac{\ln p_{x+1}}{\ln p_x}$ 比值較修勻後的變動程度大(尤其是在最後的幾個年齡的變化)。

圖十一(日本男性死亡率修勻後 Gompertz 函數比值的上下界)—z=3, h=100000



¹¹ 因採用 Whittaker 修勻法(z=3, h 值與曝露數相等的範例)，不會隨著最後幾個年齡的死亡率劇烈變動而大幅變動，會因最後幾個年齡的曝露數大小調整。

圖十二(新加坡男性死亡率修勻後 Gompertz 函數比值的上下界)— $z=3$,
 $h=2000$



表一、日本及新加坡男性的瞬間死亡率 μ_x 是否符合 Gompertz 函數？

	圖示法： 1、原始死亡率 2、Whittaker 3、Bayesian 4、Kernel	以 Bootstrap 法模擬一千次原始死亡率，計算其 Gompertz 函數比值的信賴區間	Bootstrap 模擬出原始死亡率，再以 Whittaker 修勻，計算其 Gompertz 函數比值的信賴區間
日本	1、97 歲以前是 2、須再檢定 3、97 歲以前是 4、107 歲以前是	是	$z=3, h=100000$ ：是
新加坡	1、不是 2、須再檢定 3、93 歲以前是 4、97 歲以前是	是	$z=3, h=100000$ ：是

5. 結論與建議

本文以日本與新加坡西元 1980~1990 年高齡男性死亡率資料為基礎，在死亡率的修勻方面，分別以 Whittaker、Bayesian、核估計法修勻高年齡死亡率，其中 Whitakker 法的修勻結果最合乎死亡率遞增及平滑的要求；核修勻法在挑選適當 h 值時也有不錯的效果；Bayesian 修勻法因經驗值的曝露數過大，使修勻值幾乎等於經驗值，除非有較合適的過去經驗為依據，不建議使用 Bayesian 修勻法。

而在檢驗死亡率是否符合 Gompertz 假設方面，經過圖形表示及拔靴法的驗證，日本及新加坡的高齡男性死亡率無論是使用原始資料或是 Whittaker 修勻值，均不拒絕死亡率符合 Gompertz 函數的假設。由於台灣正逐漸邁入已開發國家行列，人口老化的問題漸漸浮現，精確的高齡人口死亡率及生命表之需求也日漸殷切。放眼亞洲，人口老化可資借鏡的國家僅有日本與新加坡兩國，因此本文得出日本與新加坡的高齡男性死亡率符合 Gompertz 函數的結論，不但代表高齡死亡率使用參數假設(例如：Gompertz、Weibull 等常見的模型)的可能性，也可作為台灣未來修勻高年齡生命表的參考。

本文中使用的 Bootstrap 模擬法雖然在只有一組死亡率觀察值的情形下，依然可計算出 $\frac{\ln p_{x+1}}{\ln p_x}$ 比值的變異數，但因受限於曝露數（年齡較高者過少），造成標準差过大，易使檢定失真。另外，本文結論為日本及新加坡在適當的條件下，不拒絕瞬間死亡率 μ_x 符合 Gompertz 函數的假設，也就是說，可以計算出 Gompertz 函數的參數值，但因本文只得出存在一直線，但此直線並非唯一，如何選取適當的常數值，留待未來研究再繼續探討。

參考文獻

- 1、行政院經濟建設委員會人力規劃處(1999,5)，中華民國臺灣地區民國87年至140年人口推計。
- 2、行政院經濟建設委員會人力規劃處(1999,6)，全球人口老化之危機。
- 3、行政院內政部(2000,6)，民國八十八年中華民國臺閩地區人口統計。
- 4、余清祥(1997)，修勻-統計在保險的應用，台北雙葉書局。
- 5、余清祥、連宏銘，1999/3，“台灣地區死亡率現況的實證研究”，壽險季刊，第111期，2-16。
- 6、Borgan, O. (1979), “On the theory of moving average graduation,” *Scandinavian Actuarial Journal*, 62, 83-105.
- 7、Efron, B. and Tibshirani, R. J. (1993), *An introduction to the Bootstrap*, New York: Chapman and Hall.
- 8、Kannisto, V. (1996), *The advancing frontier of survival life tables for old age*, Odense University Press.
- 9、Olshansky, S. J. and Carnes, B. A. (1997), “Ever Since Gompertz,” *Demography*, 34(1), 1-15.
- 10、United Nations (1992), *Long-range World population Projections*, Department of International Economics and Social Affairs, United Nations, New York.

附錄：

附表一(日本及十三國男性 80 歲至 109 歲及新加坡男性 80 歲至 100 歲死亡率)

x 年齡	日 本 (男性)			十 三 國 (男性)			新 加 坡 (男性)		
	n_x 曝露數	d_x 死亡數	q_x 死亡率	n_x 曝露數	d_x 死亡數	q_x 死亡率	n_x 曝露數	d_x 死亡數	q_x 死亡率
80	1488902	129059	0.08668	6171300	602450	0.09762	10468	974	0.09305
81	1297356	124697	0.09612	5386660	575263	0.10679	8873	900	0.10143
82	1118653	118437	0.10587	4637269	539856	0.11642	7395	825	0.11156
83	948822	109827	0.11575	3935705	498531	0.12667	6013	697	0.11592
84	801055	101416	0.12660	3300704	453904	0.13752	4894	624	0.12750
85	665127	92095	0.13846	2718510	405671	0.14923	3921	516	0.13160
86	540835	81528	0.15074	2203932	357107	0.16203	3101	447	0.14415
87	428401	71832	0.16767	1755371	309010	0.17604	2379	370	0.15553
88	329268	58712	0.17831	1367630	258807	0.18924	1756	275	0.15661
89	247987	48086	0.19391	1048111	213666	0.20386	1305	224	0.17165
90	183667	38599	0.21016	790000	173994	0.22025	976	170	0.17418
91	133629	30014	0.22461	586574	138558	0.23622	737	147	0.19946
92	94682	22923	0.24211	426200	107969	0.25333	518	119	0.22973
93	65001	16576	0.25501	302759	82024	0.27092	347	65	0.18732
94	43645	11898	0.27261	209593	60627	0.28926	245	59	0.24082
95	28379	8297	0.29236	142067	43595	0.30686	166	37	0.22289
96	18018	5524	0.30658	93741	30306	0.32330	113	30	0.26549
97	11186	3633	0.32478	60141	20295	0.33746	67	19	0.28358
98	6755	2253	0.33353	37828	13209	0.34919	40	11	0.27500
99	3987	1440	0.36117	23170	8784	0.37911	23	11	0.47826
100	2223	822	0.36977	13066	5486	0.41987	11	6	0.54545
101	1210	484	0.40000	7048	2979	0.42267			
102	625	244	0.39040	3732	1606	0.43033			
103	333	148	0.44444	1958	914	0.46680			
104	155	63	0.40645	963	428	0.44444			
105	84	40	0.47619	482	216	0.44813			
106	38	17	0.44737	236	108	0.45763			
107	16	6	0.37500	109	54	0.49541			
108	9	6	0.66667	50	28	0.56000			
109	2	2	1.00000	18	14	0.77778			

附表二(日本及新加坡死亡率的各種方法修勻結果)

日 本 (男 性)					新 加 坡 (男 性)				
年齡 Age	死亡率 q_x (z=3,h=100000)	Whittaker	Bayesian (r=0.9)	Kernel (h=1)	年齡 Age	死亡率 q_x (z=3,h=2000)	Whittaker	Bayesian (r=0.9)	Kernel (h=1)
80	0.08668	0.11245	0.09277	0.09094	80	0.09305	0.107463	0.09762	0.09682
81	0.09612	0.11578	0.10117	0.09632	81	0.10143	0.110905	0.10679	0.10163
82	0.10588	0.12008	0.11013	0.10458	82	0.11156	0.114709	0.11641	0.10863
83	0.11575	0.12534	0.11979	0.11456	83	0.11592	0.118882	0.12666	0.11630
84	0.12660	0.13157	0.13012	0.12519	84	0.12750	0.123452	0.13751	0.12414
85	0.13846	0.13877	0.14135	0.13669	85	0.13160	0.128475	0.14921	0.13224
86	0.15075	0.14694	0.15371	0.14931	86	0.14415	0.134061	0.16202	0.14140
87	0.16768	0.15610	0.16732	0.16288	87	0.15553	0.140375	0.17601	0.15054
88	0.17831	0.16625	0.18002	0.17635	88	0.15661	0.147657	0.18920	0.15824
89	0.19391	0.17741	0.19412	0.19033	89	0.17165	0.156225	0.20381	0.16664
90	0.21016	0.18959	0.20988	0.20533	90	0.17418	0.166475	0.22017	0.17775
91	0.22461	0.20282	0.22513	0.22064	91	0.19946	0.178872	0.23611	0.19360
92	0.24211	0.21714	0.24139	0.23591	92	0.22973	0.193943	0.25317	0.20778
93	0.25501	0.23257	0.25792	0.25102	93	0.18732	0.212251	0.27067	0.21230
94	0.27261	0.24916	0.27511	0.26688	94	0.24082	0.234377	0.28890	0.21983
95	0.29236	0.26696	0.29155	0.28386	95	0.22289	0.260868	0.30633	0.23305
96	0.30658	0.28601	0.30662	0.30049	96	0.26549	0.292205	0.32256	0.25074
97	0.32478	0.30638	0.31926	0.31602	97	0.28358	0.32877	0.33634	0.27168
98	0.33353	0.32811	0.32914	0.33100	98	0.27500	0.370826	0.34759	0.30590
99	0.36117	0.35128	0.35654	0.34764	99	0.47826	0.418511	0.37693	0.37908
100	0.36977	0.37593	0.39347	0.36507	100	0.54546	0.471863	0.41615	0.46636
101	0.40000	0.40213	0.39319	0.38201					
102	0.39040	0.42992	0.39788	0.39682					
103	0.44444	0.45937	0.43288	0.41288					
104	0.40645	0.49050	0.41108	0.42671					
105	0.47619	0.52337	0.42158	0.44046					
106	0.44737	0.55799	0.44591	0.44882					
107	0.37500	0.59438	0.51667	0.45657					
108	0.66667	0.63255	0.65490	0.52485					
109	1.00000	0.67251	1.00000	0.67031					